Sličnost trouglova i Talesova teorema

Definicija sličnosti trouglova

Dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su slična ako su im sva tri ugla redom podudarna i ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne tj. $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. $\Diamond$

Stav 1 (slič. UUU)

Ako u dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imamo sva tri ugla redom podudarna tada su ta dva trougla slična. $\Diamond$

Stav 2 (slič. SSS)

Ako u trouglovima $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imamo tri stranice redom proporcionalne tada su ta dva trougla slična. $\Diamond$

Stav 3 (slič. SUS)

Ako dva trougla imaju dvije stranice proporcionalne i podudaran ugao između njih tada su ta dva trougla slična. $\Diamond$

Stav 4 (slič. SSU)

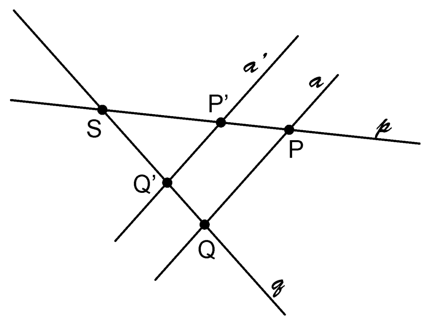
Ako dva trougla imaju dvije stranice proporcionalne i podudaran ugao nasprem veće stranice tada su ta dva trougla slična. $\Diamond$

1. U trouglu $\triangle ABC$ date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B', C')||p(A, B)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom.

2. U trouglu $\triangle ABC$ date su dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AF}$. Dokazati da je tada $p(E, F)||p(B, C)$.

Talesova teorema

Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i q u tačkama P, Q i P' i Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi $\dfrac{SP}{SP'} = \dfrac{SQ}{SQ'} = \dfrac{PQ}{P'Q'}$. $\Diamond$



Posljedice Talesova teorema

$$\frac{SP'}{SQ'} = \frac{SP}{SQ}, \qquad \frac{SP}{P'P} = \frac{SQ}{Q'Q}, \qquad \frac{SP'}{P'P} = \frac{SQ'}{Q'Q}, \qquad \frac{SP}{PQ} = \frac{SP'}{P'Q'}$$

Obrat Talesove teoreme

$$\frac{SP}{SP'} = \frac{SQ}{SQ'} = \frac{PQ}{P'Q'} \quad \Rightarrow \quad a||a'.$$

3. Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$ ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je $\triangle PAI$ jkk, da važi poredak $P - M - S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave $pp[P, S)$ i kruga k dokazati da je $\triangle AMP \sim \triangle NAP$ i da je $\triangle PIN \sim \triangle PMI$.

4. Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da je $C_1D = \frac{1}{2}h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

5. Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\measuredangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da je $\frac{EC}{EF} = \frac{AB}{BF}$.

6. U pravoulom trouglu $\triangle ABC$, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

7. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

8. Neka su AC i BD dvije duži koje se sijeku u tački S. Dokazati da je četverougao $ABCD$ tetivni akko je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.
Posljedica zadatka: Potreban i dovoljan uslov da četverougao bude tetivni je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

9. Neka je S tačka izvan kruga, prava $p(S, T)$ tangenta na krug u tački T i neka prava SCD siječe krug u tačkama C i D. Dokazati da je $ST^2 = SC \cdot SD$.
Napomena: Proizvod $SC \cdot SD$, gdje je tačka S unutar ili izvan kružnice i prava SCD siječe krug u tačkama C i D, zovemo stepen ili potencija tačke S u odnosu na datu kružnicu.

10. U četverouglu $\square ABCD$ dijagonale se sijeku u tački S. Ako je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$, $\measuredangle ABD = 60°$ i $\measuredangle DAC = 50°$ odrediti ugao $\measuredangle ADC$.

11. Neka je S centar kružnice opisane oko trougla ABC, M tačka takva da je $M - A - B$. Ako je $MA \cdot MB = MC^2$, odrediti $\measuredangle SCM$.

12. Dokazati da težišnica trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

13. Dokazati da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu trougla u omjeru druge dvije stranice.

14. Neka je C proizvoljna tačka kružnice k, a B tačka na prečniku AA_1 kružnice takva da je $AC = BA_1$. Dokazati da se u trouglu $\triangle ABC$ simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku u istoj tački.

15. Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

16. Dokazati da je rastojanje proizvoljne tačke kružnice od njene tetive jednako geometriskoj sredini rastojanja od te tačke do tangenti u krajnjim tačkama iste tetive.

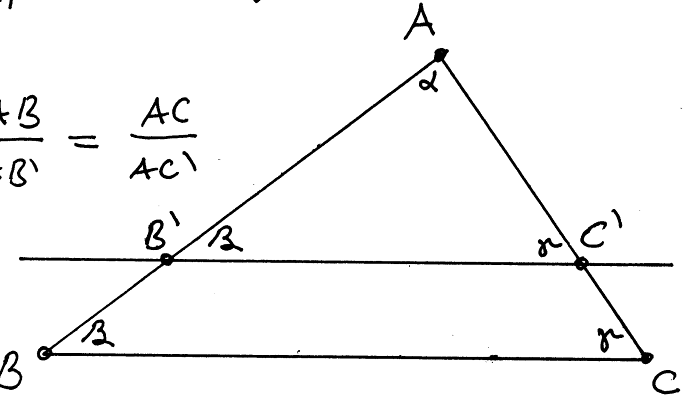
17. U pravougaoniku $\square ABCD$ tačka M je sredina stranice AD, a N je sredina strane BC. Neka je $\{Q\} = p(P, M) \cap p(A, C)$. Dokazati da je $\measuredangle QNM = \measuredangle MNP$, gdje je P proizvoljna tačka na pravoj $p(C, D)$ takva da je $C - D - P$.

18. U trougao $\triangle ABC$ upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

(#) U trouglu ΔABC date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B',C') \parallel p(A,B)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom. Dokazati i obrnuto, ako su date dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$ tada je $p(E,F) \parallel p(B,C)$.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ B' \in AB,\ C' \in AC \\ p(B',C') \parallel p(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$



$p(B,C) \parallel p(B',C')$ i $p(B,A)$ je transferzala $\Rightarrow \measuredangle CBA \cong \measuredangle C'B'A = \beta$

$p(B,C) \parallel p(B',C')$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A = \gamma$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ABC \cong \measuredangle AB'C' = \beta \\ \measuredangle BCA \cong \measuredangle B'C'A = \gamma \\ \measuredangle BAC \cong \measuredangle B'AC' = \alpha \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta AB'C'$$

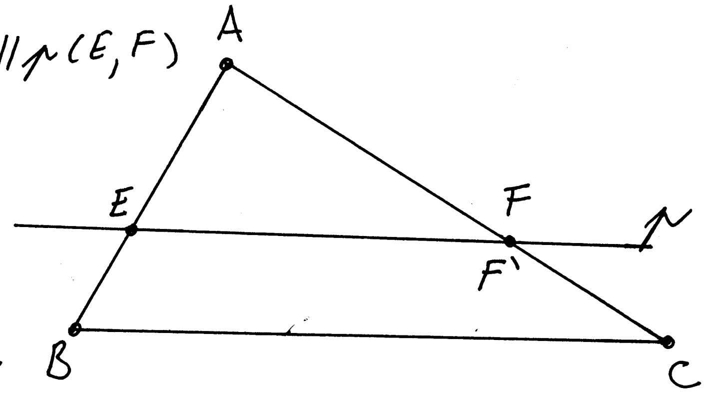
$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

q.e.d.

obrnuto:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ E \in AB,\ F \in AC \\ \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \end{array}\right\} \Rightarrow p(B,C) \parallel p(E,F)$$



Kroz tačku E povucimo pravu p tako da je $p \parallel p(B,C)$. Neka je $p \cap AC = \{F'\}$.

Na osnovu prethodnog dijela dokaza imamo

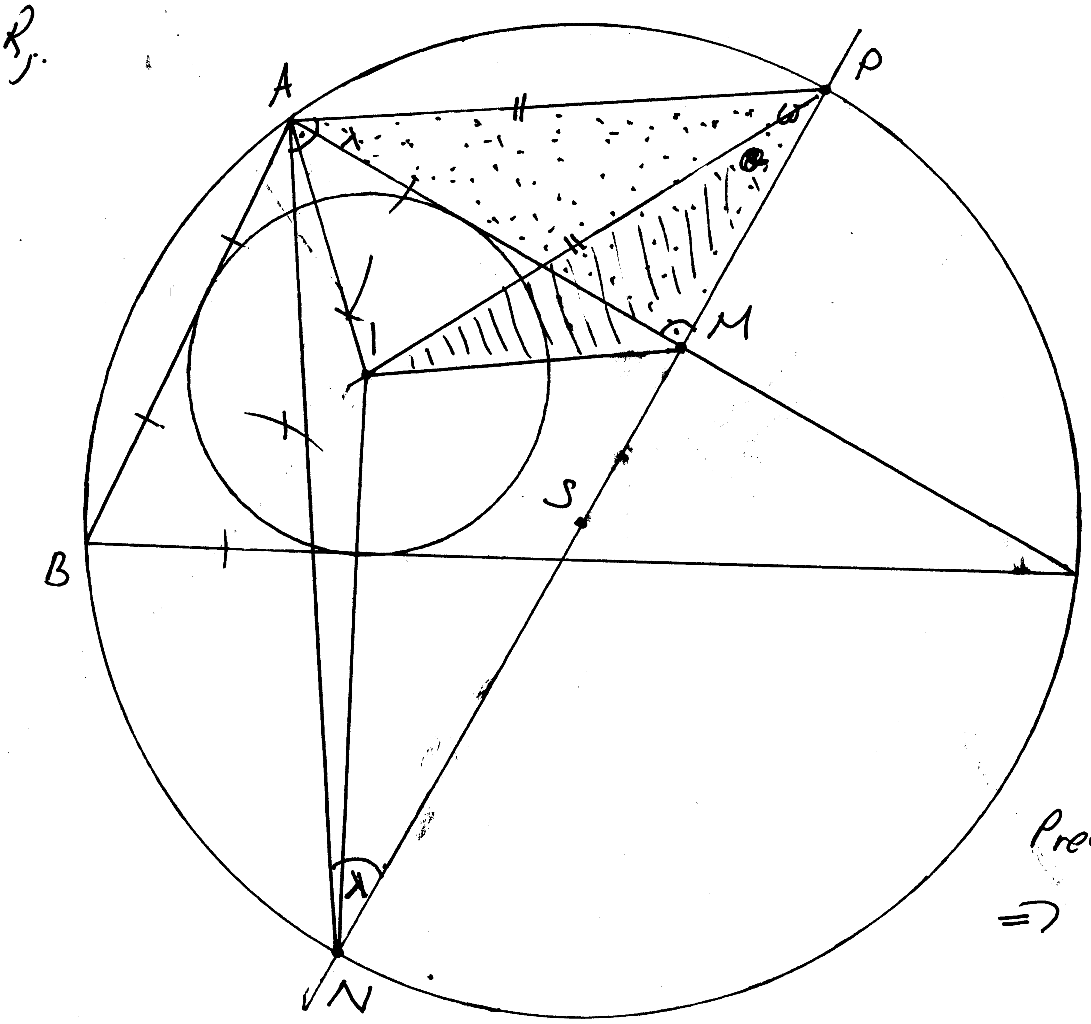
$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF'}$. Kako je još $F \in AC$, $F' \in AC$ i $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$

$\Rightarrow F' \equiv F$ pa $p(E,F) \parallel p(B,C)$

q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC, M sredina stranice AC i neka je tačka P na luku $\overset{\frown}{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k takva da je ΔPAI jkk, da važi poredak $P-M-S$ i da je $PM \perp AC$. Ako je tačka N presječna tačka poluprave pp$[P,S)$ i kruga k dokazati da je $\Delta AMP \sim \Delta NAP$ i da je $\Delta PIM \sim \Delta PMI$.

Rj.



Posmatrajmo ΔAMP i NAP. Ugao $\measuredangle APM \cong \measuredangle APN = \omega$ im je zajednički, imaju po jedan ugao od $90°$ tj.:

$\measuredangle AMP = \measuredangle NAP = 90°$

($\measuredangle NAP$ je ugao nad prečnikom). Prema tome i treći ugao im je podudaran $\measuredangle PAM \cong \measuredangle ANP = \lambda$.

Prema slučaju UUU

$\Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta NAP$

$\Downarrow$ q.e.d.

$$\frac{AP}{NP} = \frac{MP}{AP}$$

Kako je ΔAPI jkk to je $AP \cong PI$.

Sad imamo

$$\frac{PI}{NP} = \frac{MP}{IP}$$

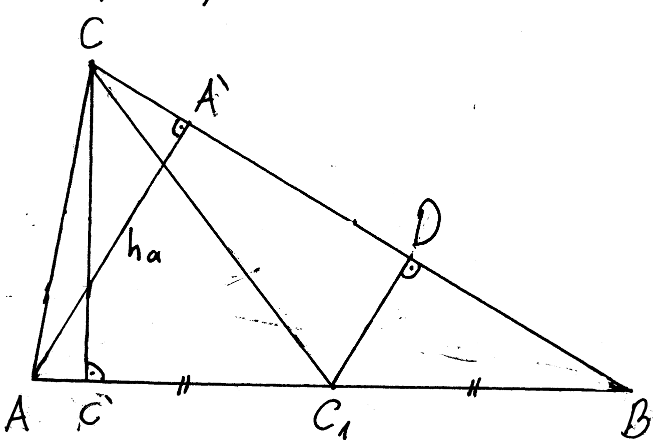
$\measuredangle IPN \cong \measuredangle MPI = \theta$
(zajednički ugao)

(slič. SUS) $\Longrightarrow$ $\Delta PIN \sim \Delta PMI$

q.e.d.

(#) Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i poznata je težišnica $CC_1 = t_c$. Ako je data tačka D na duži BA' takva da $C_1D \perp BC$ dokazati da $C_1D = \frac{1}{2} h_a$. Tvrdnju dokazati bez primjene teoreme o srednjoj liniji trougla.

Rj.



Prvo primjetimo da je C_1 sredina duži AB.

Kako je $AA' \perp BC$ i $C_1D \perp BC$ to je $p(A, A') \parallel p(C_1, D)$.

Primjenom Talesove teoreme sad možemo zaključiti da je $\dfrac{AB}{C_1B} = \dfrac{AA'}{C_1D}$.

Kako je $\dfrac{AB}{C_1B} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow AB = 2\,C_1B$.

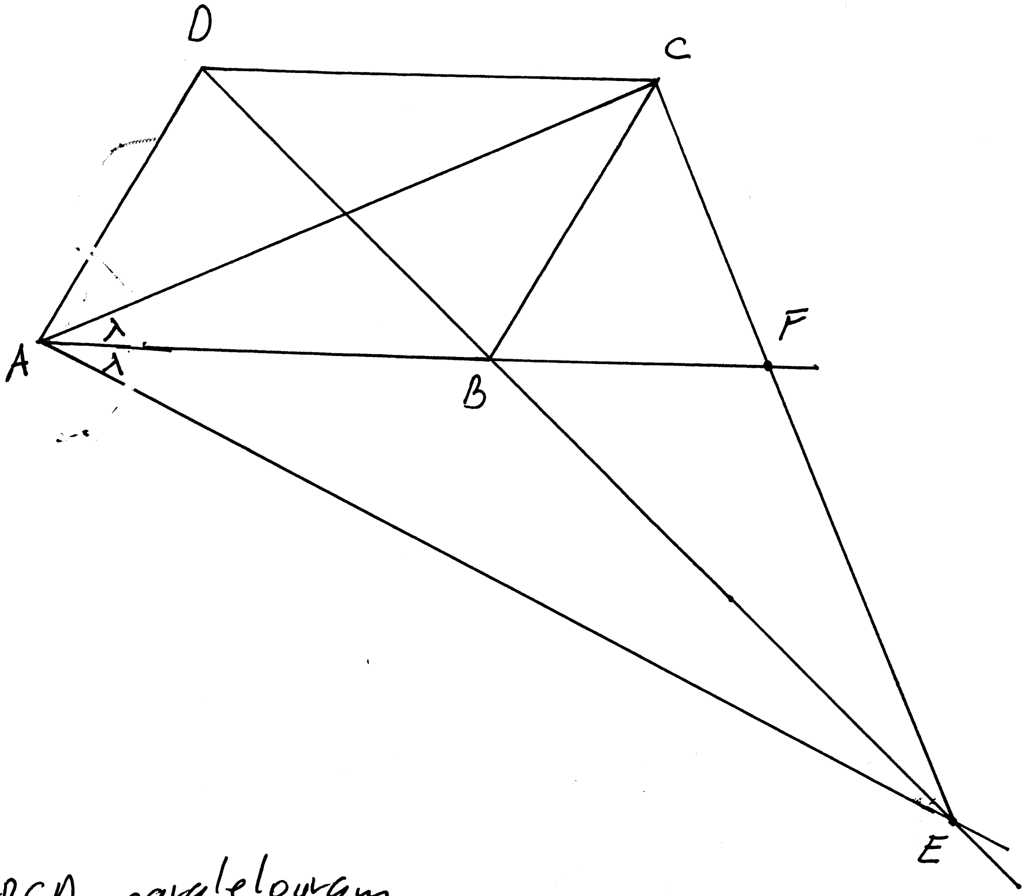
Možemo zaključiti $\dfrac{AA'}{C_1D} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow 2\,C_1D = AA'$

$$\Rightarrow \quad C_1D = \frac{1}{2} h_a$$

q.e.d.

(#) Neka je $\square ABCD$ paralelogram. Na polupravoj DB uzeta je tačka E tako da je poluprava AB simetrala ugla $\sphericalangle CAE$. Neka je F tačka presjeka pravih CE i AB. Dokazati da $\dfrac{EC}{EF} = \dfrac{AB}{BF}$.

Rj.



$\square ABCD$ paralelogram

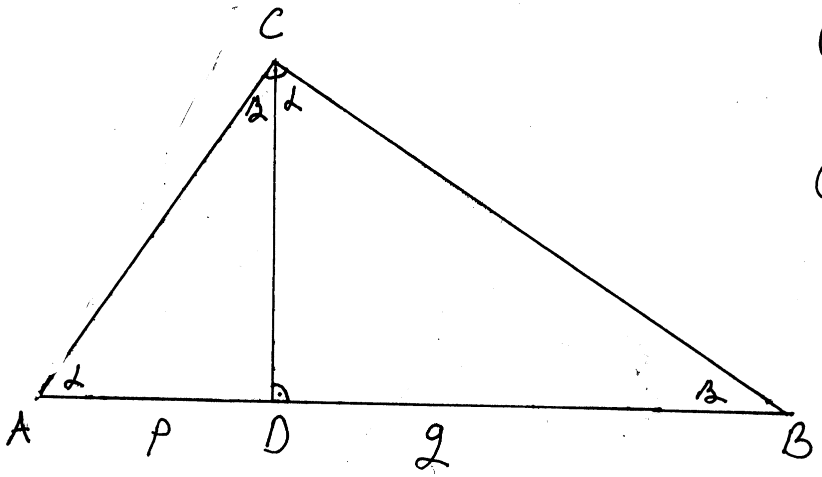
$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{T.T.}{\Longrightarrow} \dfrac{EC}{EF} = \dfrac{ED}{EB} = \dfrac{CD}{BF}$ ... (*)

Kako je $CD \cong AB \overset{(*)}{\Longrightarrow} \dfrac{EC}{EF} = \dfrac{AB}{BF}$

q.e.d.

(#) U pravouglom trouglu ΔABC, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

Rj.



Uvedimo oznake

$\measuredangle CAD = \alpha$; $\measuredangle ABC = \beta$

U ΔADC kako je

$\measuredangle DAC = \alpha$, $\measuredangle ADC = 90^\circ$

$\Rightarrow \measuredangle ACD = \beta$

Slično $\measuredangle DCB = \alpha$.

$$\left.\begin{aligned} \measuredangle ADC &= \measuredangle CDB = 90^\circ \\ \measuredangle CAD &= \measuredangle BCD = \alpha \\ \measuredangle DCA &= \measuredangle DBC = \beta \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ADC \sim \Delta CDB$$

$$\Downarrow$$

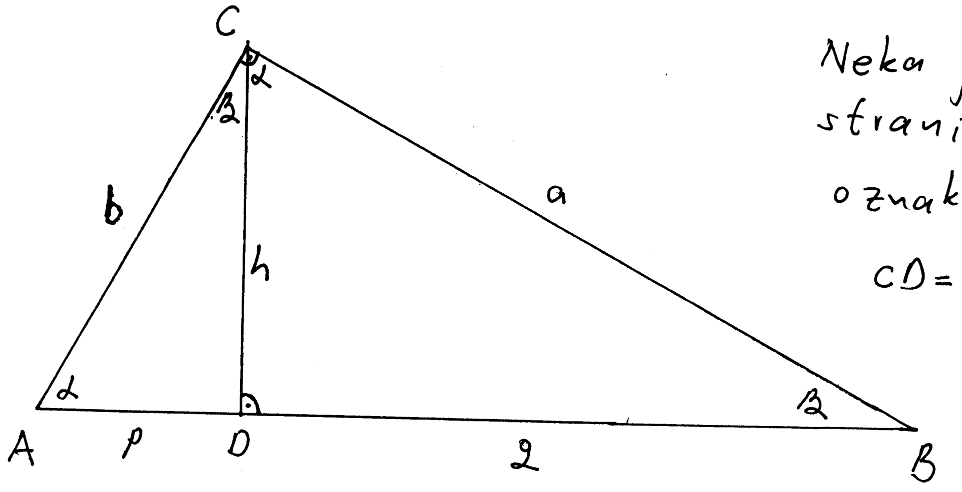
$$\frac{CD}{q} = \frac{p}{CD} \Rightarrow CD^2 = pq$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{pq}$$

q.e.d.

#) U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\sphericalangle CAB=\alpha$ i $\sphericalangle ABC=\beta$.

$c=p+q$

U ΔADC, $\sphericalangle ADC=90^\circ$, $\sphericalangle CAD=\alpha \Rightarrow \sphericalangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\sphericalangle BDC=90^\circ$, $\sphericalangle DBC=\beta \Rightarrow \sphericalangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADC=90^\circ\\ \sphericalangle CAB=\sphericalangle CAD=\alpha\\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \dots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ACB=\sphericalangle CDB=90^\circ\\ \sphericalangle CAB=\sphericalangle BCD=\alpha\\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC \sim \Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \dots(2)$$

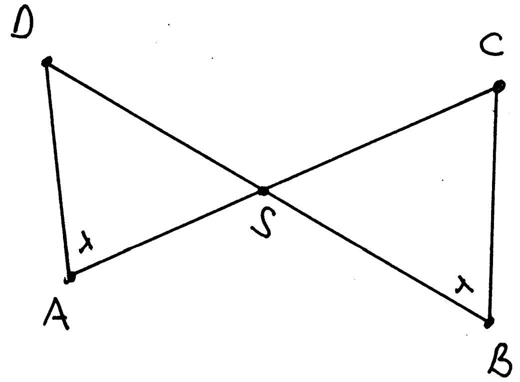
(1) i (2) $\Rightarrow$ $a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

#) Neka su AC i BD dvije duži koje se sijeku u tački S. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ tetivni akko je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

Rj. potreban uslov „$\Leftarrow$": Pretpostavimo da je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$ i dokažimo da je četverougao $\square ABCD$ tetivni.



$$\left.\begin{aligned} \measuredangle ASD &= \measuredangle CSB \\ \frac{SA}{SD} &= \frac{SB}{SD} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{sličnost SUS}}$$

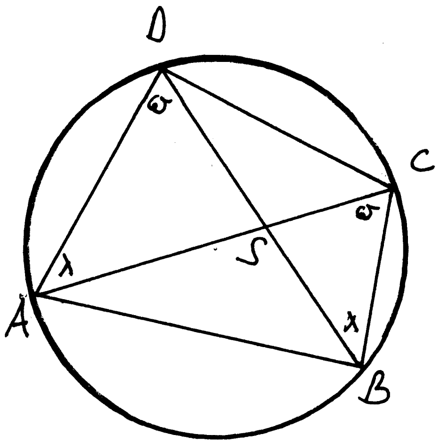
$$\Rightarrow \Delta ASD \sim \Delta BSC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle DAS \cong \measuredangle CBS = \lambda$$

i kako ova dva ugla gledaju na zajedničku stranicu $\Rightarrow$ $\square ABCD$ je tetivni četverougao.

dovoljan uslov „$\Rightarrow$": Pretpostavimo da je četverougao $\square ABCD$ tetivni. Dokažimo da vrijedi $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.



$$\left.\begin{aligned} &\measuredangle DAS \cong \measuredangle CBS = \lambda \quad \text{(nad tetivom } CD) \\ &\measuredangle ASD \cong \measuredangle CSB \quad \text{(unakrsni uglovi)} \\ &\measuredangle ADS \cong \measuredangle BCS = \omega \quad \text{(nad tetivom } AB) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{sličnost UUU}} \Delta ASD \sim \Delta BSC$$

$$\Downarrow$$

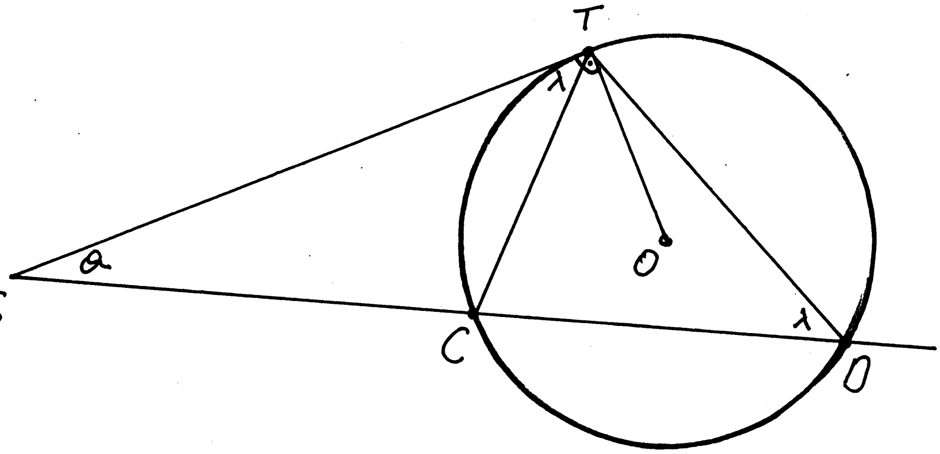
$$\frac{SA}{SB} = \frac{SD}{SC} \Rightarrow SA \cdot SC = SB \cdot SD$$

q.e.d.

Napomena: Potreban i dovoljan uslov da četverougao bude tetivni $SA \cdot SC = SB \cdot SD$.

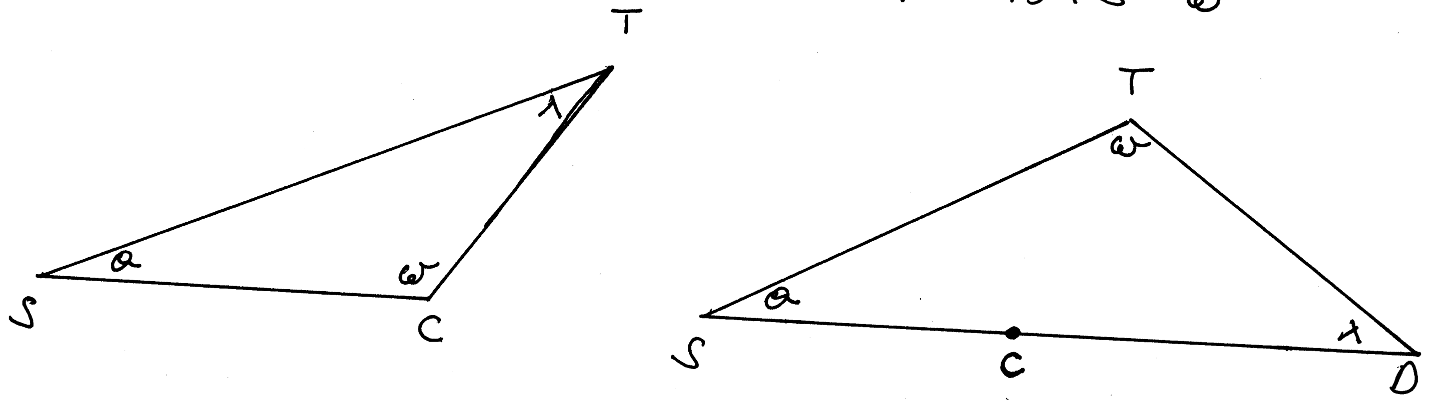
Neka je S tačka izvan kruga, prava $p(S,T)$ tangenta na krug u tački T i neka prava SCD siječe krug u tačkama C i D. Dokazati da je $ST^2 = SC \cdot SD$.

Rj.



Ugao između tangente i tetive jednak je periferiskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow \angle CTS \cong \angle SDT = \lambda$.

Dalje imam $\angle DST = \alpha \quad \Rightarrow \quad \angle SCT \cong \angle DTS = \omega$



$$\left.\begin{array}{l} \angle TSD \cong \angle TSC = \alpha \\ \angle SDT \cong \angle CTS = \lambda \\ \angle DTS \cong \angle SCT = \omega \end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \quad \Delta SDT \sim \Delta SCT$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{ST}{SC} = \frac{SD}{ST}$$

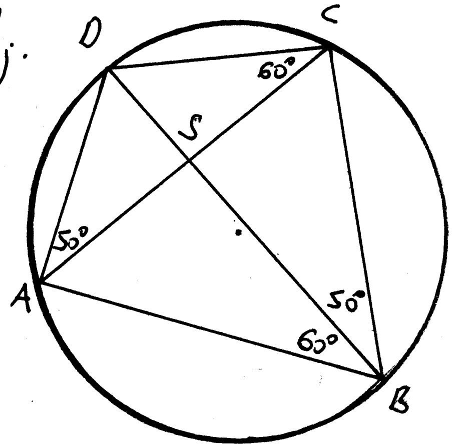
$$\Rightarrow \quad ST^2 = SC \cdot SD$$

q.e.d.

<u>Napomena</u>: Proizvod $SC \cdot SD$ za tačku S, unutar ili izvan kružnice, je konstantan (zavisi samo od položaja tačke S) i ovaj proizvod zovemo POTENCIJAl tačke S u odnosu na datu kružnicu.

(#) U četvorouglu $\square ABCD$ dijagonale se sijeku u tački S. Ako je $SA \cdot SC = SB \cdot SD$, $\measuredangle ABD = 60^\circ$ i $\measuredangle DAC = 50^\circ$ odrediti ugao $\measuredangle ADC$.

Rj.



$SA \cdot SC = SB \cdot SD \Rightarrow \square ABCD$ tetivni

$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = 60^\circ$, $\measuredangle DAC = 50^\circ = \measuredangle DBC$

$\Rightarrow \measuredangle ADC = 70^\circ$

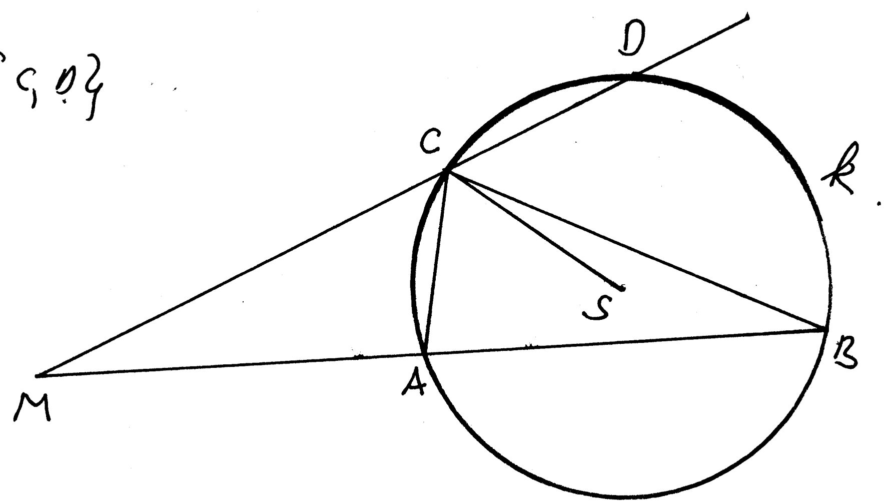
(možemo dobiti kao zbir uglova u $\triangle ACD$ ili kao $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180^\circ$)

(#) Neka je S centar kružnice opisan oko $\triangle ABC$, M tačka takva da je $M-A-B$. Ako je $MA \cdot MB = MC^2$, odrediti $\measuredangle SCM$.

Rj. Neka je

$p(M,C) \cap k = \{C, D\}$

$\measuredangle SCM = ?$



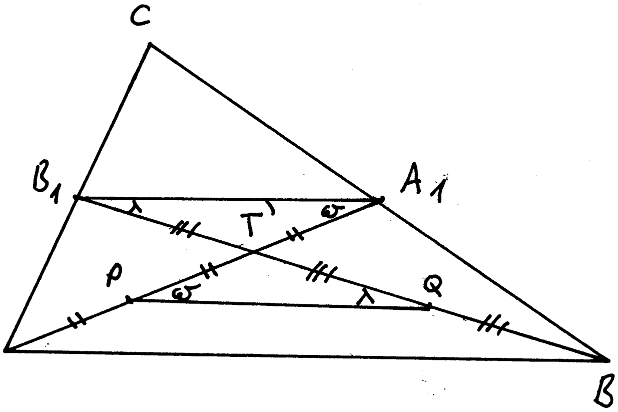
Imamo $MA \cdot MB = MC \cdot MD = MC^2 \Rightarrow MC = MD \Rightarrow C \equiv D$

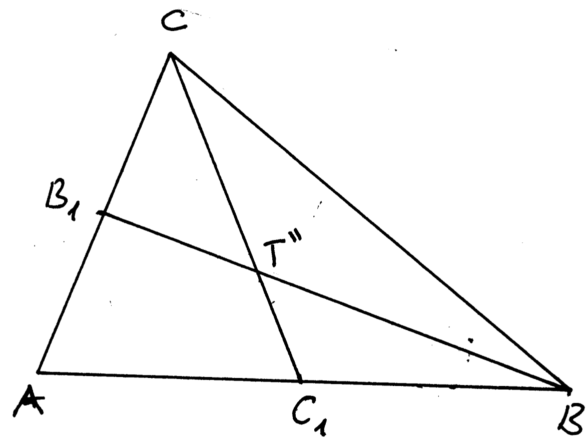
$p(M,C)$ je tangenta na kružnicu k

$\Rightarrow \measuredangle SCM = 90^\circ$.

(#) Dokazati da težište trougla dijeli težišnice u omjeru 2:1.

Rj.:





Neka su AA_1 i BB_1 težišnice u trouglu $\triangle ABC$ i $\{T'\} = AA_1 \cap BB_1$.

A_1B_1 je srednja linija $\triangle ABC$ pa $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

Neka su P i Q redom sredine duži AT' i BT'.

PQ je srednja linija $\triangle ABT'$ pa $PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow PQ \cong B_1A_1$. Dalje, posmatrajmo $\triangle PQT'$ i $\triangle B_1T'A_1$.

Ovi trouglovi su slični (imaju sva tri podudarna ugla

$$\Rightarrow \frac{PT'}{T'A_1} = \frac{QT'}{T'B_1} = \frac{PQ}{A_1B_1} = 1 \Rightarrow PT' \cong A_1T' \text{ i } QT' \cong T'B_1$$

Pa imamo $$\frac{AT'}{T'A_1} = \frac{BT'}{T'B_1} = \frac{2}{1}.$$

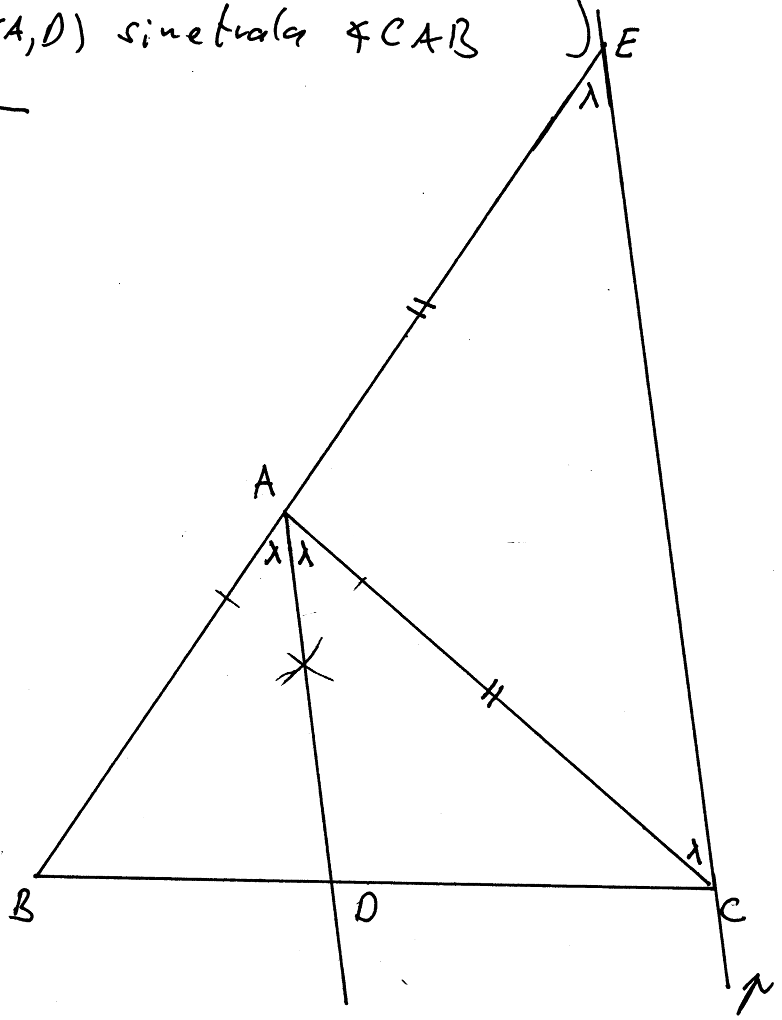
Na isti način ako pretpostavimo da se težišnice BB_1 i CC_1 sijeku u tački T'' bi dobili $\frac{CT''}{T''C_1} = \frac{BT''}{T''B_1} = \frac{2}{1}$.

Iz jedinstvenosti podjele duži BB_1 u datom omjeru slijedi da je $T' \equiv T''$ pa težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1.

(#) Dokazati da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u trouglu u omjeru druge dvije stranice.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ D \in BC \\ p(A,D) \text{ simetrala } \measuredangle CAB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



Kroz tačku C povucimo pravu $p \parallel p(A,D)$. $\{E\} = p \cap p(B,A)$

Kako je $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \lambda$ to je i $\measuredangle ACE = \lambda$, a kako je $\measuredangle BAC = 2\lambda$ vanjski ugao $\triangle ACE$ to $\measuredangle AEC = \lambda$

$\Rightarrow \triangle ACE$ jkk $(AC = AE)$

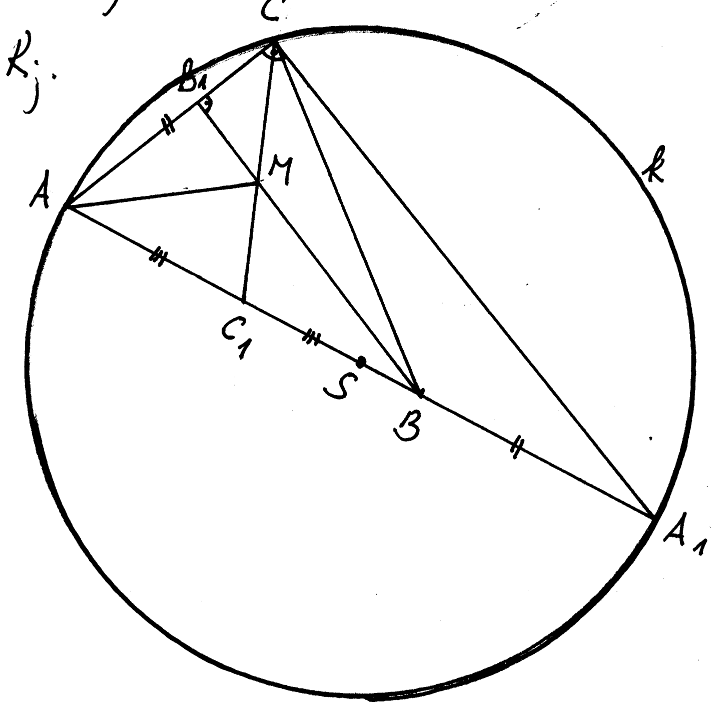
$$p \parallel p(A,D) \xRightarrow{T.T.} \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{tj.} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

<u>Napomena:</u> Zbog jedinstvenosti unutrašnje podjele duži u datom omjeru vidimo da vrijedi i obrnuta tvrdnja tj. ako je tačka D na duži BC takva da je $BD : DC = AB : AC$ tada je prava AD simetrala ugla $\measuredangle BAC$.

(#) Neka je C proizvoljna tačka kružnice k, a B tačka na prečniku AA_1 kružnice takva da je $AC = BA_1$. Dokazati da se u trouglu ΔABC simetrala ugla kod A, visina iz B i težišna linija iz C sijeku u istoj tački.

Rj.



Neka je u ΔABC, CC_1 težišna linija, a BB_1 visina.

$\{M\} = CC_1 \cap BB_1$

Trebamo pokazati da je $p(A,M)$ simetrala ugla $\measuredangle BAC$.

Dovoljno je pokazati da je

$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{AC_1}{AC}$$

(simetrala ugla dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije)

$\measuredangle ACA_1 = 90°$ (ugao nad prečnikom)

$$p(B,B_1) \parallel p(A_1,C) \xRightarrow{T_0T_0} \frac{C_1M}{MC} = \frac{C_1B}{BA_1}.$$

Kako je $C_1B \cong AC_1$ i $BA_1 \cong AC$ to

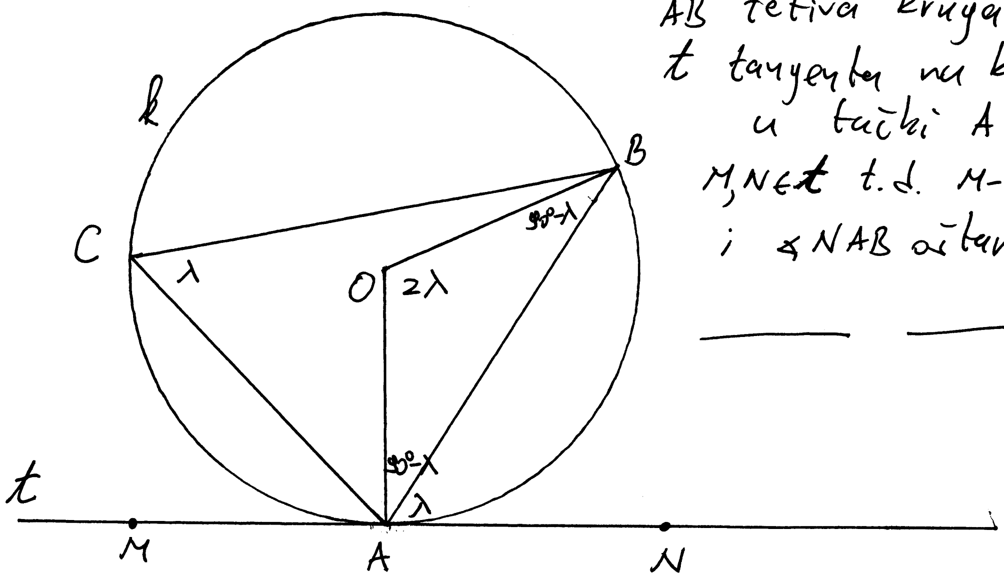
$$\frac{C_1M}{MC} = \frac{AC_1}{AC} \Rightarrow p(A,M) \text{ je simetrala ugla}$$

$\Rightarrow$ simetrala ugla kod A,
visina iz B i
težišna linija iz C sijeku se
u istoj tački

q.e.d.

(#) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.



$$\left.\begin{array}{l} k(O,r) \text{ dati krug} \\ AB \text{ tetiva kruga} \\ t \text{ tangenta na krug} \\ \quad \text{u tački } A \\ M,N \in t \text{ t.d. } M-A-N \\ \text{i } \sphericalangle NAB \text{ oštar} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle NAB \cong \sphericalangle ACB$$

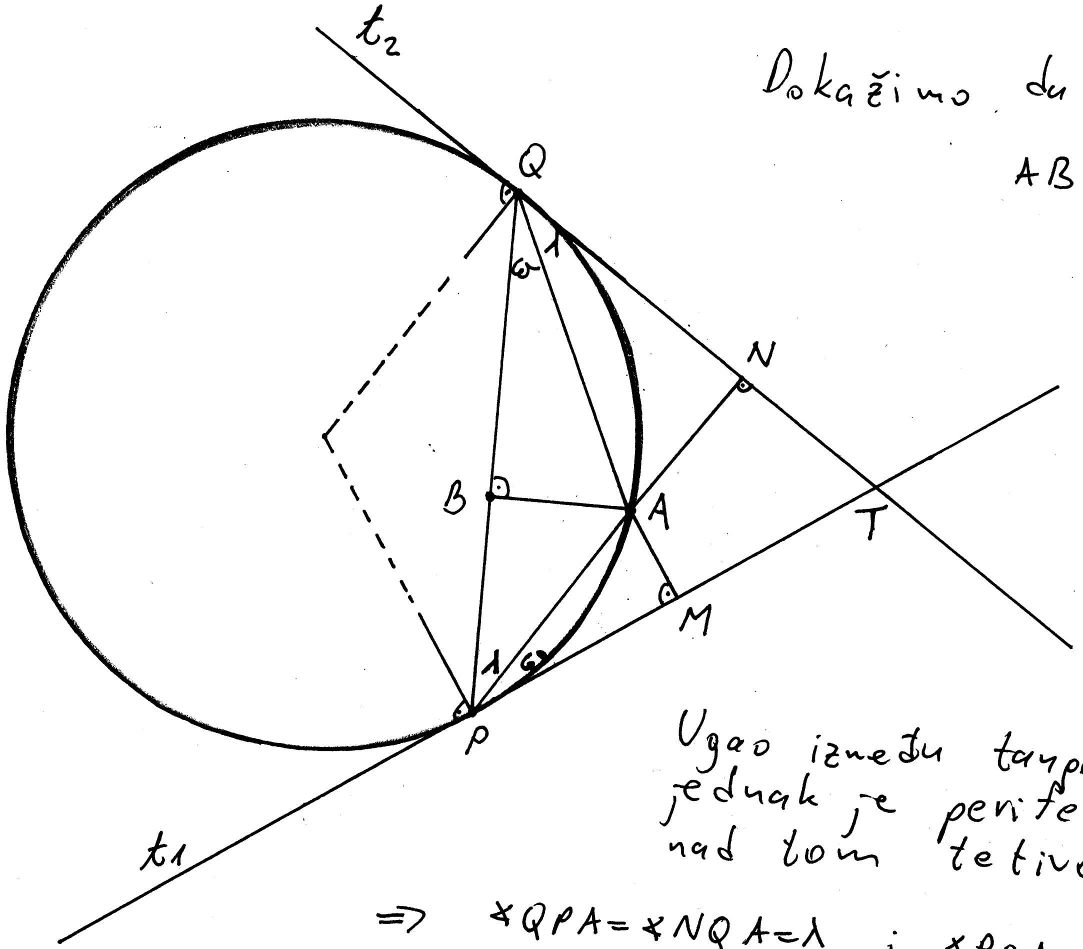
$\sphericalangle ACB = \lambda \Rightarrow \sphericalangle AOB = 2\lambda \Rightarrow \sphericalangle OAB \cong \sphericalangle OBA = 90^\circ - \lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \sphericalangle BAN = \lambda \Rightarrow \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle BAN = \lambda$

q.e.d.

(#) Dokazati da je rastojanje proizvoljne tačke kružnice od njene tetive jednako geometrijskoj sredini rastojanja od te tačke do tangenti u krajnjim tačkama iste tetive.

Rj.



Dokažimo da je

$$AB = \sqrt{MA \cdot AN}.$$

Ugao između tangente i tetive jednak je periferijskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle QPA = \measuredangle NQA = \lambda \quad i \quad \measuredangle PQA = \measuredangle APM = \omega.$$

$\triangle BPA \sim \triangle NQA$ (sličnost UUU)

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AN} = \frac{PA}{QA} \quad \ldots (1)$$

$\triangle PMA \sim \triangle QBA$ (sličnost UUU)

$$\Downarrow$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{PA}{QA} \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AB^2 = AN \cdot AM$$

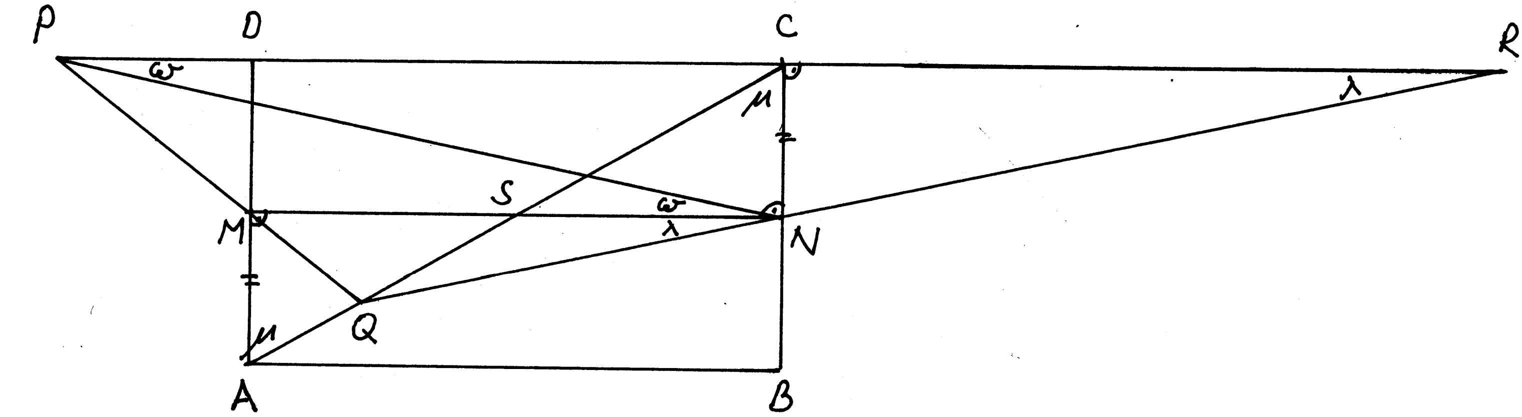
$$\Downarrow$$

$$AB = \sqrt{AN \cdot AM}$$

q.e.d.

(#) U pravougaonika □ABCD tačka M je sredina strane AD, a N je sredina strane BC. Neka je $\{Q\} = p(P,M) \cap p(A,C)$. Dokazati da je $\sphericalangle QNM = \sphericalangle MNP$, gde je P proizvoljna tačka na pravoj $p(C,D)$ takva da je C-D-P.

Rj.



Označimo sa $\{S\} = AC \cap MN$, $\lambda = \sphericalangle QNM$ i $\omega = \sphericalangle MNP$.
Treba dokazati da je $\lambda = \omega$.

□ABCD pravougaonik, M sredina AD, N sredina BC

$\Rightarrow AM \cong AD \cong BN \cong CN$ i kako je $p(A,D) \parallel p(B,C)$

$\Rightarrow$ □ABNM i □MNCD paralelogrami

a kako je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 90^\circ$ to su

□ABNM i □MNCD pravougaonici

$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle MAC = \sphericalangle NCA = \mu$

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle MAS &\cong \sphericalangle SCN = \mu \\ AM &\cong NC \\ \sphericalangle AMS &\cong \sphericalangle SNC = 90^\circ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{USU} \Delta SMA \cong \Delta SNC$$

$$\Downarrow$$

$MS \cong SN$ tj.

S je sredina duži MN

Označimo sa $\{R\} = p(Q,N) \cap p(P,C)$.

$p(M,N) \parallel p(P,R)$ i $p(Q,R)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle QNM \cong \sphericalangle NRP = \lambda$

$p(M,N) \parallel p(P,R)$ i $p(P,N)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle MNP \cong \sphericalangle NPR = \omega$

$p(M,N) \parallel p(P,R) \xrightarrow{TT} \frac{QC}{QS} = \frac{CR}{SN}$ i $\frac{QC}{QS} = \frac{PC}{SM} \Rightarrow \frac{RC}{CP} = \frac{SN}{SM} = 1$ tj. $RC \cong PC$

$$\left.\begin{aligned} PC &\cong RC \\ \sphericalangle PCN &\cong \sphericalangle RCN = 90^\circ \\ CN &\cong CN \end{aligned}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta PCN \cong \Delta RCN$$

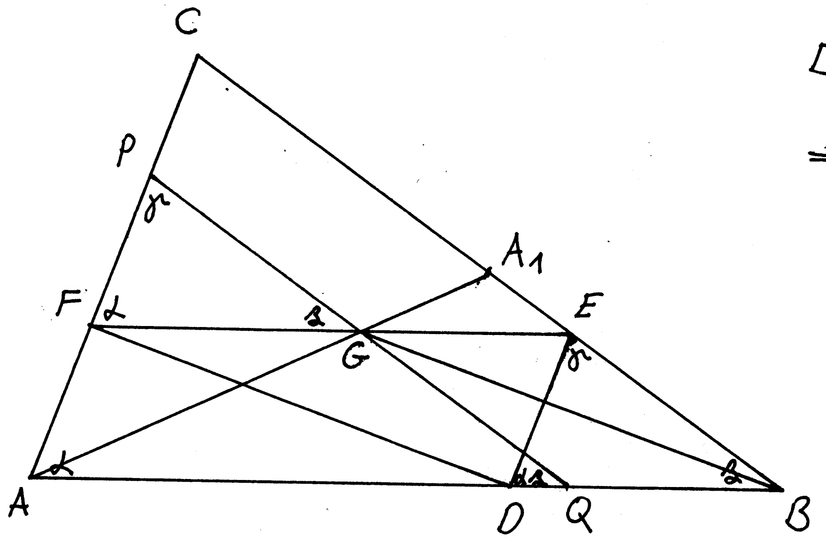
$$\Downarrow$$

$\sphericalangle NPC \cong \sphericalangle NRC \Rightarrow \lambda = \omega$

q.e.d.

(#) U trougao $\triangle ABC$ upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

Rj.



$\square ADEF$ paralelogram

$\Rightarrow p(A,D)\parallel p(E,F)$

i $p(A,F)\parallel p(D,E)$

Kroz tačku G povucimo pravu paralelnu pravoj $p(B,C)$ koja siječe stranice AC i AB redom u tačkama P i Q.

$p(G,E)\parallel p(Q,B)$ i $p(Q,G)\parallel p(E,B) \Rightarrow \square QBEG$ paralelogram

$\Rightarrow GQ \cong BE$

$p(B,C)\parallel p(P,Q) \xrightarrow{TT} \frac{BA_1}{CA_1}=\frac{GQ}{GP} \Rightarrow \frac{GQ}{GP}=1$ tj. $PG=GQ$

$p(B,C)\parallel p(P,Q)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \angle AQP \cong \angle ABC=\beta$

$p(A,B)\parallel p(E,F)$ i $p(Q,P)$ transferzala $\Rightarrow \angle AQP \cong FGP=\beta$

tj. $\angle AQC \cong \angle FGP=\beta$

$p(A,B)\parallel p(F,E)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \angle CAB \cong \angle CFE=\alpha$

$p(A,C)\parallel p(D,F)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \angle CAB \cong \angle EDB=\alpha$

tj. $\angle CFE \cong \angle EDB=\alpha$ pa je i $\angle FPG \cong \angle DEB=\gamma$

$$\left.\begin{array}{l}\angle PFG \cong \angle EDB=\alpha\\ \angle FGP \cong \angle DBE=\beta\\ \angle GPF \cong \angle BED=\gamma\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sličn. UUU}} \triangle FGP \sim \triangle DBE$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DB}{FG}=\frac{BE}{PG} \xrightarrow{BE=GQ=PG} \frac{DB}{FG}=1 \text{ tj. } DB=FG$$

$p(D,B)\parallel p(F,G)$ i $DB\cong FG \Rightarrow \square BGFD$ paralelogram

q.e.d.

Konstrukcija duži. Homotetija. Trigonometrija. Razni zadaci.

Konstrukcija duži

1. U troglu $\triangle ABC$ date su tačke $B' \in AB$ i $C' \in AC$ takve da je $p(B', C')||p(A, B)$. Dokazati da su stranice AB i AC proporcionalne sa AB' i AC' redom. Dokazati i obrnuto, ako su date dvije tačke $E \in AB$ i $F \in AC$ takve da je $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AF}$ tada je $p(E, F)||p(B, C)$.

2. Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom prave p i q u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave dokazati da je $\dfrac{SP}{SQ} = \dfrac{SP'}{SQ'}$, $\dfrac{SP'}{PP'} = \dfrac{SQ'}{QQ'}$, $\dfrac{SP}{PP'} = \dfrac{SQ}{QQ'}$ i $\dfrac{SP'}{P'Q'} = \dfrac{SP}{PQ}$.

3. Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Neka je $\{S\} = p(A, D) \cap p(B, C)$. Ako je $SA : SD = SB : SC$ i $\measuredangle BAD = 80°$ izračunati $\measuredangle ADC$.

4. Dat je trapez $\square ABCD$ kod koga se osnovice AB i CD odnose kao 2:1. Neka je $\{S\} = p(A, D) \cap p(B, C)$. Ako je $SD = 3\,cm$ izračunati AD.

5. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a \cdot b$.

6. Data je duž a. Konstruisati duž $x = a^2$.

7. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a^2 + b^2$.

8. Date su duži a i b. konstruisati duž x ako se zna da je $x : (b - a) = (2b - a) : (b + a)$.

9. Datu duž a podjeliti u omjeru 2:3.

10. Datu duž b podjeliti u omjeru 1:3.

11. Dati su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ čije su odgovarajuće stranice proporcionalne u omjeru 2:1. Ako je $\measuredangle ABC = 80°$ izračunati uglove $\measuredangle A'B'C'$ i $\measuredangle B'A'C'$.

12. Na stranicama AB i AC trougla $\triangle ABC$ uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 2 : 3$. Ako je $P_{\triangle ADE} = 2\,cm^2$ odrediti $P_{\triangle ABC}$.

13. Na stranicama AB i AC trougla $\triangle ABC$ uzete su tačke D i E takve da je $AD : DB = AE : EC = 4 : 3$. Ako je $O_{\triangle ADE} = 8\,cm$ odrediti $O_{\triangle ABC}$

Homotetija

14. Data je tačka A i duž MN. Duž MN preslikati homotetično s centrom u tački A i koeficijentom

a) k=2

b) k=$-\dfrac{2}{3}$

15. Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačka O u unutrašnjosti trougla. Trougao preslikati homotetično sa centrom u tački O i koeficijentom

a) k=$\dfrac{2}{5}$

b) k=$\dfrac{1}{3}$
Ako je $P_{\triangle ABC} = 56\,cm^2$ i $O_{\triangle ABC} = 30\,cm$ izračunati P i O novodobijenog trougla.

16. Data je kružnica k i tačka A. Preslikati datu kružnicu homotetično sa centrom u A i koeficijentom
(a) k=$-\dfrac{1}{2}$
(b) k=$\dfrac{2}{3}$
Odrediti omjer površina i obima kružnica.

17. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Dokazati da je $a^2 + b^2 = c^2$.

18. U pravoulom trouglu $\triangle ABC$, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD = p$, $BD = q$ dokazati da je $CD = \sqrt{pq}$.

19. Konstruisati duž $\sqrt{3}$.

20. Data je duž a. Konstruisati duž $\sqrt{a}$.

21. Konstruisati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab}}{a}$, ako su a i b date duži.

Trigonometrija

22. **(Kosinusna teorema)** Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\alpha$.

23. **(Sinusna teorema)** Dat je raznostrańični trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $\dfrac{sin\,\alpha}{a} = \dfrac{sin\,\beta}{b} = \dfrac{sin\,\gamma}{c}$.

24. Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$. Dokazati da je $a = 2R\,sin\alpha$, $b = 2R\,sin\beta$ i $c = 2R\,sin\gamma$.

25. Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

26. Neka je AD visina trougla $\triangle ABC$ i R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Neka su tačke E i F podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC. Ako je $AD = R\sqrt{2}$, dokazati da prava EF prolazi kroz centar opisane kružnice.

Razni zadaci

27. **(Menelaus-ova teorema)** Neka je dat trougao $\triangle ABC$ i neka prava p siječe stranice trougla AB, BC i AC (po potrebi produžiti stranice) redom u tačkama D, E i F. Tada je $\dfrac{AD}{BD} \cdot \dfrac{BF}{CF} \cdot \dfrac{CE}{AE} = 1$. Dokazati.

28. Neka je AA_1 simetrala ugla kod A trougla $\triangle ABC$, a I centar upisane kružnice. Dokazati da je $AI : IA_1 = (AB + AC) : BC$.

29. A_1, B_1, C_1 i D_1 su tačke koje su redom sredine stranica BC, CD, AD i AB kvadrata

$\square ABCD$. Dokazati da se duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 sijeku tako da obrazuju kvadrat sa stranicom jednakom $\frac{2}{5}$ dužine svake od tih duži.

30. U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ je $CH : HC_1 = 3 : 1$, gdje je H ortocentar a C_1 podnožje visine iz vrha C. Neka je K sredina visine CC_1. Kokazati da je $\measuredangle AKB = 90°$.

31. Date su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u tačkama M i N i imaju zajedničku tangentu $p(A, B)$ ($A \in k_1$, $B \in k_2$). M je tačka na pravoj $p(C, D)$ ($C \in k_1$, $D \in k_2$) takva da je $C - M - D$ i $p(C, D)||p(A, B)$. Tetive NA i CM se sijeku u tački P, tetive NB i MD se sijeku u tački Q, a prave $p(A, C)$ i $p(B, D)$ se sijeku u tački E. Dokazati da je $PE \cong QE$.

32. U trouglu $\triangle ABC$, AP polovi ugao $\measuredangle BAC$, sa P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$ sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP \cong AQ + QB$. Koje su moguće veličine za uglove u trouglu $\triangle ABC$.

33. **(zadatak 25, drugi put)** Neka je $\triangle ABC$ oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je $\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$.

34. **(Menelaus-ova teorema, drugi put)** Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$ ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku. Dokazati da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne ako i samo ako vrijedi $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.

35. Kroz tjemena A i B jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$ konstruisane su normale n_1 i n_2 na AB u istoj poluravni u kojoj je tačka C. Kroz tjeme C konstruisana je prava koja siječe n_1 u M i n_2 u N. Simetrala duži MN siječe pravu AB u tački S.

(a) Dokazati da je $\triangle MSN$jednakostraničan.

(b) Površinu trougla $\triangle MSN$ izraziti kao funkciju dužine stranice $\triangle ABC$ i ugla $\measuredangle ACS$.

36. U kružnicu je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lukova BC, CA i AB. Tačka M se nalazi sa one strane prave BC sa koje nije tačka A, tačka N se nalazi sa one strane prave AC sa koje nije tačka B i tačka P se nalazi sa one strane prave AB sa koje nije tačka C. Tetiva MN siječe stranicu BC i tački K, a NP siječe stranicu AB u tački L. Dokazati da je $KL||AC$.

37. **(Teorema Čevija)** Neka tačke A_1, B_1 i C_1 pripadaju stranicama BC, AC i AB trougla $\triangle ABC$ redom. Dokazati da se duži AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u istoj tački ako i samo ako vrijedi $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.

38. Dokazati da se

(a) težišnice

(b) visine

(c) simetrale uglova

trougla sijeku u istoj tački.

39. Neka su $p(A, A_1)$, $p(B, B_1)$ i $p(C, C_1)$ tri prave trougla $\triangle ABC$ koje se sijeku u R. Dokazati da vrijedi $\frac{RA_1}{AA_1} + \frac{RB_1}{BB_1} + \frac{RC_1}{CC_1} = 1$.

40. Dokazati da je rastojanje vrha trougla od ortocentra dva puta veće od rastojanja centra opisane kružnice od stranice trougla naspram tog vrha.

41. **(Ojlerova prava)** Dokazati da su ortocentar, težište i centar opisane kružnice trougla kolinearne tačke pri čemu težište T dijeli duž HS u omjeru 2:1.

Napomena: Prava kroz H, T i S se zove Ojlerova prava.

42. Dokazati da sredine stranica, podnožja visina i sredine duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima trougla pripadaju jednoj kružnici.

Napomena: Kružnica koja prolazi kroz navedenih devet tačaka zove se Ojlerova kružnica ili Kružnicadevet tačaka.

43. Dokazati da kružnica 9 tačaka ima centar na sredini duži SH (S centar opisane kružnice, H ortocentar trougla) a poluprečnik je dužine $\frac{1}{2}R$ (R poluprečnik opisane kružnice).

<u>**Zadaci za vježbu**</u>

44. U trouglu $\triangle ABC$ duž $DE||AC$, $T \in DE$ (T je težište trougla), $E \in AB$ i $D \in BC$. Ako je $P_{\triangle ABC} = 1\,cm^2$ izračunati $P_{\triangle BDE}$.

45. Visina i težišna linija povučene iz istog tjemena trougla dijele ugao trougla pri tom tjemenu na četiri podudarna ugla. Odrediti uglove trougla.

46. Simetrale uglova A, B i C trougla ABC sijeku se u tački S i sijeku opisanu kružnicu oko trougla redom u tačkama A_1, B_1 i C_1. Dokazati da je:
(a) $AB_1 = B_1C = B_1S$;
(b) prava B_1C_1 je simetrala duži AS.

47. Duž koja spaja sredine lukova AB i AC kružnice opisane oko trougla ABC siječe stranice AB i AC u tačkama K i L, redom. Dokazati da su tačke A, K, L i centar upisane kružnice u trougao ABC - tjemena jednog romba.

48. Tačka M je sredina jednog od lukova AC kružnice opisane oko trougla ABC, a D je druga tačka presjeka prave BC i kružnice sa centrom u tački M i poluprečnikom MA. Dokazati da je $CD = BC - AB$.

49. U kružnicu je upisan konveksni petougao čiji su svi uglovi međusobno podudarni. Dokazati da su i sve stranice tog petougla podudarne.

50. Pravilan desetougao $ABCDEFGHIJ$ upisan je u kružnicu poluprečnika r. Dokazati da je $AD - AB = r$.

51. U trougao ABC ($AB \neq BC$) upisan je kvadrat, tako da mu dva tjemena pripadaju stranici AB. Dokazati da je trougao ABC pravougli, sa pravim uglom kod C, ako i samo ako simetrala ugla kod tjemena C prolazi kroz centar kvadrata.

52. Dokazati da su u pravouglom trouglu ABC rastojanja tjemena oštrog ugla A od centra dvije spolja upisane kružnice, od kojih jedna dodiruje hipotenuzu AB, a druga katetu BC -međusobno jednaka.

53. Dokazati da kružnica opisana oko trougla polovi duži koje spajaju centar upisane sa centrima spolja upisanih kružnica.

54. Kružnica sa centrom O na osnovici AC jednakokrakog trougla ABC dodiruje krake trougla. Povučena je tangenta kružnice koja siječe krake AB i BC redom u tačkama M i N. Dokazati da su trouglovi AMO, MON i NOC međusobno slični.

55. Dokazati da je trapez tangentan ako i samo ako se kružnice konstruisane nad njegovim bočnim stranicama kao nad prečnicima dodiruju.

56. Dvije kružnice se dodiruju spolja. Dokazati da je četverougao čija su tjemena tačke dodira zajedničkih spoljašnjih tangenti te dvije kružnice tangentan.

57. Dokazati da su duži određene tačkama dodira naspremnih stranica tangentnog četverougla i njemu upisane kružnice podudarne ako i samo ako su u tom četverouglu podudarna dva naspramna ugla.

58. Ako neka kružnica dodiruje produžetke stranica konveksnog četverougla, tada je razlika jednog para naspramnih stranica tog četverougla jednaka razlici drugog para naspramnih stranica.

59. Konveksan četverougao ima osobinu da postoji kružnica koja dodiruje njegove stranice (upisana kružnica) i postoji kružnica koja dodiruje produžetke njegovih stranica. Dokazati da su dijagonale toga četverougla uzajamno normalne.

60. Duž AB je prečnik kružnice k. Neka je k_1 kružnica sa centrom u tački A koja siječe kružnicu k u tačkama C i D. Neka je M proizvoljna tačka kružnice k_1, a N, P i Q redom druge tačke presjeka pravih MB, MC i MD sa kružnicom k. Dokazati da je četverougao $MPBQ$ paralelogram.

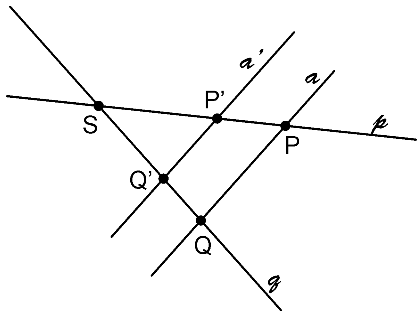
Euklidska geometrija 2

1. Za dva trougla kažemo da su slična akko... Nabrojati četri stava o sličnosti trouglova! O čemu moramo voditi računa kada se pozivamo na sličnost SSU?

2. Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni ($AS \cdot CS = ...$, gdje je S...).

3. Ugao između tangente i tetive jednak je peri...

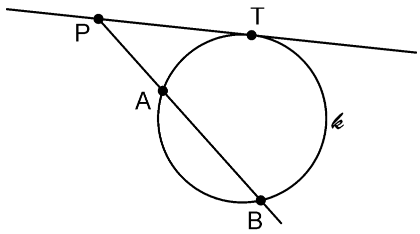
4. Talesova teorema glasi: Neka su... (vidi sliku)... Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada vrijedi $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square}$.



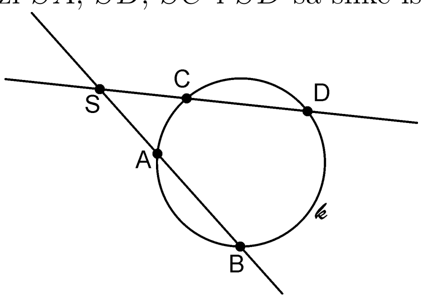
5. Poljedica talesove teoreme: $\frac{SP}{SQ} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP'}{PP'} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{\square}{\square}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{\square}{\square}$.

6. Obrat Talesove teoreme glasi: $\frac{SP}{SP'} = \frac{\square}{\square} = \frac{PQ}{\square} \Rightarrow a \| a'$.

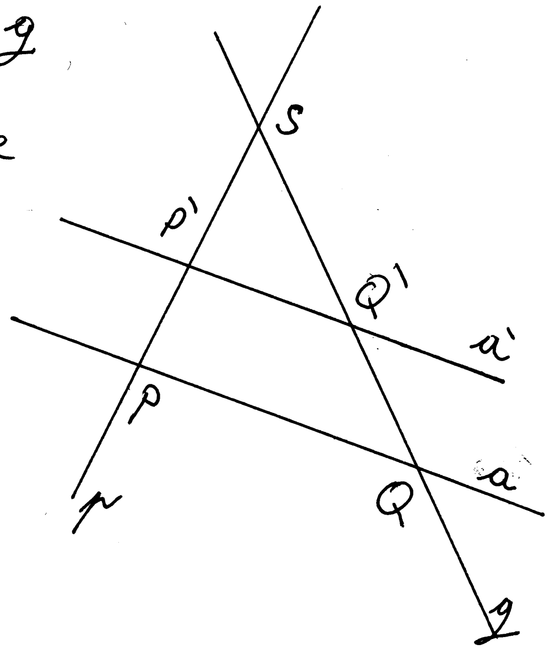
7. Neka je prava $p(P,T)$ tangenta na krug k. U kakvom su odnosu duži PT, PA i PB sa slike ispod?



8. Neka su date dvije prave koje se sijeku u tački S i koje sijeku krug k u tačkama A, B, C i D. U kakvom su odnosu duži SA, SB, SC i SD sa slike ispod?



Prisjetimo seTalesove teoreme



Talesov teorem: Neka se prave p i g sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i g u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave tada je

$$\frac{SP}{SP'} = \frac{SQ}{SQ'} = \frac{PQ}{P'Q'}.$$

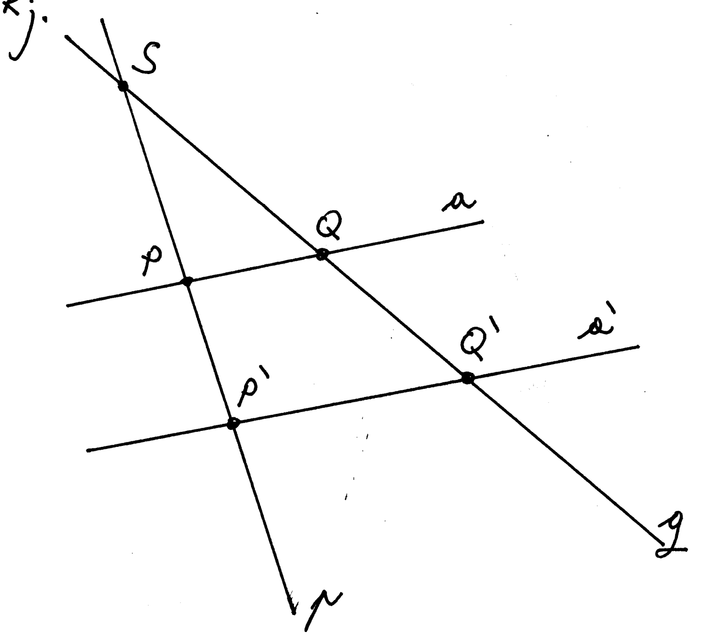
Obrat talesove teoreme:

$$\frac{SP}{SP'} = \frac{SQ}{SQ'} = \frac{PQ}{P'Q'} \Longrightarrow a \parallel a'$$

2. Neka se prave p i q sijeku u tački S i neka su a i a' dvije prave koje ne sadrže tačku S i sijeku, redom, prave p i q u tačkama P, Q i P', Q'. Ako su a i a' dvije međusobno paralelne prave dokazati da je $\frac{SP}{SQ} = \frac{SP'}{SQ'}$,

$\frac{SP'}{PP'} = \frac{SQ'}{QQ'}$, $\frac{SP}{PP'} = \frac{SQ}{QQ'}$ i $\frac{SP'}{P'Q'} = \frac{SP}{PQ}$.

Rj.



Prema talesovoj teoremi znamo da je

$$\frac{SP'}{SP} = \frac{SQ'}{SQ} = \frac{P'Q'}{PQ}$$

a) $\frac{SP'}{SP} = \frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SQ}{SP} = \frac{SQ'}{SP'}$

$\Rightarrow \frac{SP}{SQ} = \frac{SP'}{SQ'}$ q.e.d.

b) $\frac{SP'}{SP} = \frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP}{SP'} = \frac{SQ}{SQ'} \Rightarrow \frac{SP}{SP'} - 1 = \frac{SQ}{SQ'} - 1$

$\Rightarrow \frac{SP - SP'}{SP'} = \frac{SQ - SQ'}{SQ'} \Rightarrow \frac{PP'}{SP'} = \frac{QQ'}{SQ'} \Rightarrow \frac{SP'}{PP'} = \frac{SQ'}{QQ'}$ q.e.d.

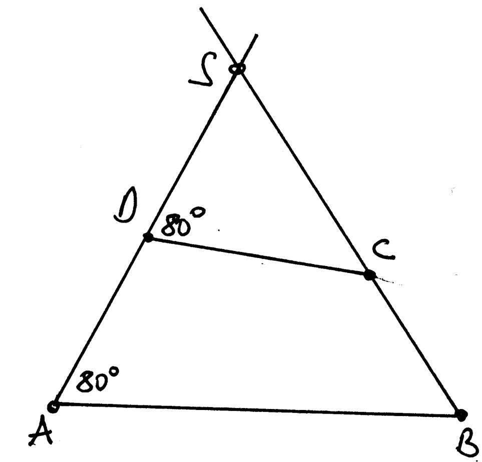
c) $\frac{SP'}{SP} = \frac{SQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP'}{SP} - 1 = \frac{SQ'}{SQ} - 1 \Rightarrow \frac{SP' - SP}{SP} = \frac{SQ' - SQ}{SQ}$

$\Rightarrow \frac{PP'}{SP} = \frac{QQ'}{SQ} \Rightarrow \frac{SP}{PP'} = \frac{SQ}{QQ'}$ q.e.d.

d) $\frac{SP'}{SP} = \frac{P'Q'}{PQ} \Rightarrow \frac{SP'}{P'Q'} = \frac{SP}{PQ}$ q.e.d.

3. Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SA:SD = SB:SC$ i $\measuredangle BAD = 80^\circ$ izračunati $\measuredangle ADC$.

Rj.



Kako je $SA:SD = SB:SC \overset{OTT}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$.

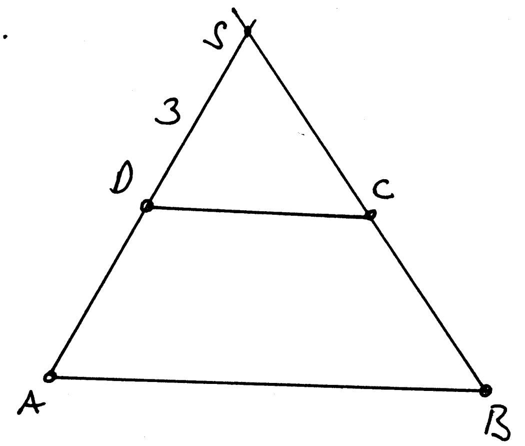
$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle CDS = 80^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle ADC = 100^\circ$

4. Dat je trapez $\square ABCD$ kod koga se osnovice AB i CD odnose kao $2:1$. Neka je $\{S\} = p(A,D) \cap p(B,C)$. Ako je $SD = 3$ cm izračunati AD.

Rj.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$$

$$p(A,B) \parallel p(C,D) \overset{TT}{\Rightarrow} \frac{SA}{SD} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$$

$SA = 2SD$

$SA = 6$ cm $\Rightarrow$ $AD = 3$ cm

5. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x = a.b$.

Rj.

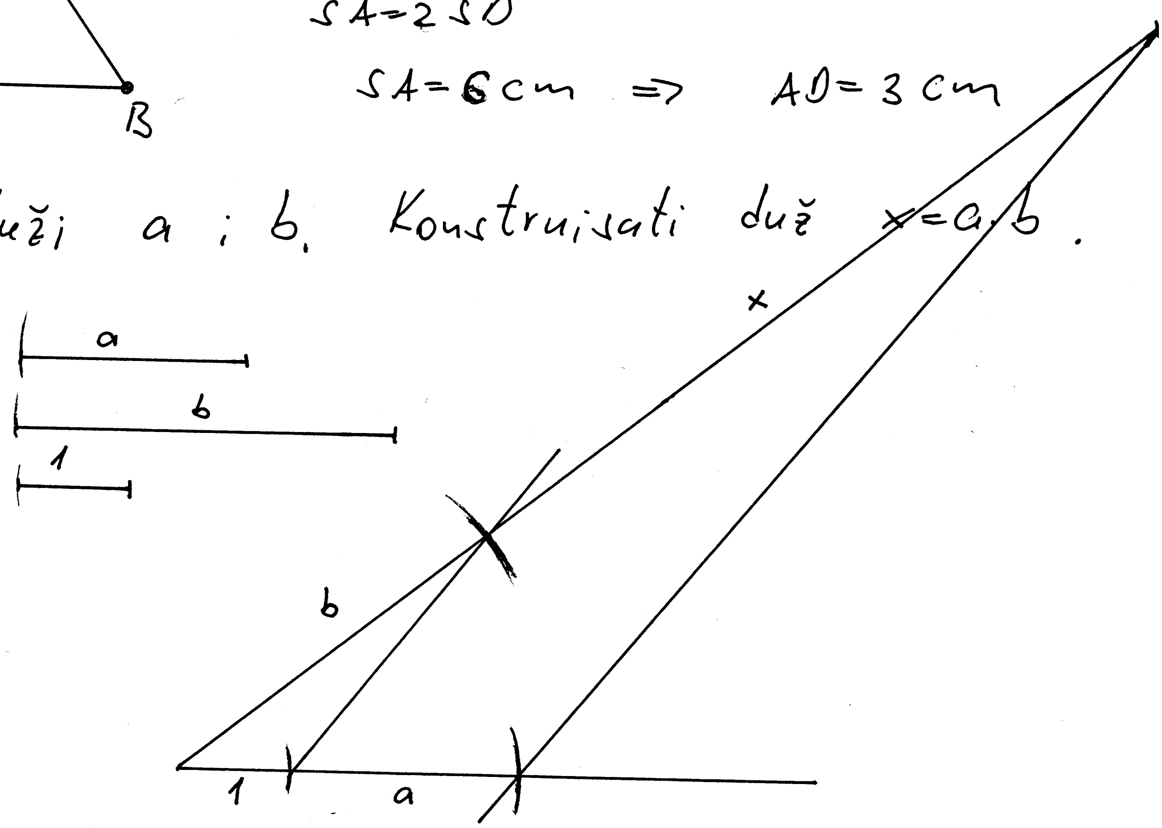
$x = a.b$

$\frac{x}{b} = a$

$\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$

$\frac{a}{1} = \frac{x}{b}$

$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$



6. Data je duž a. Konstruisati duž $x=a^2$.

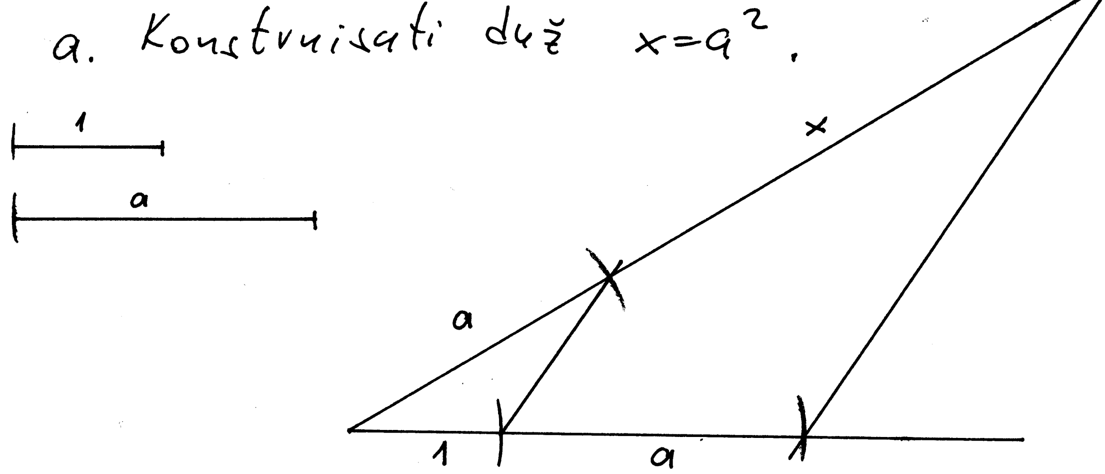
Rj.

$x=a^2$

$x=a\cdot a$

$\frac{x}{a}=\frac{a}{1}$

$\frac{1}{a}=\frac{a}{x}$



7. Date su duži a i b. Konstruisati duž $x=a^2+b^2$.

Up. $x=a^2+b^2$

$x=x_1+x_2$ gdje su $x_1=a^2$, $x_2=b^2$.

8. Date su duži a i b. Konstruisati duž x ako se zna da je $x:(b-a)=(b-a):(b+a)$.

Uputa:

Ako stavimo $b-a=c$, $b+a=d$ imamo

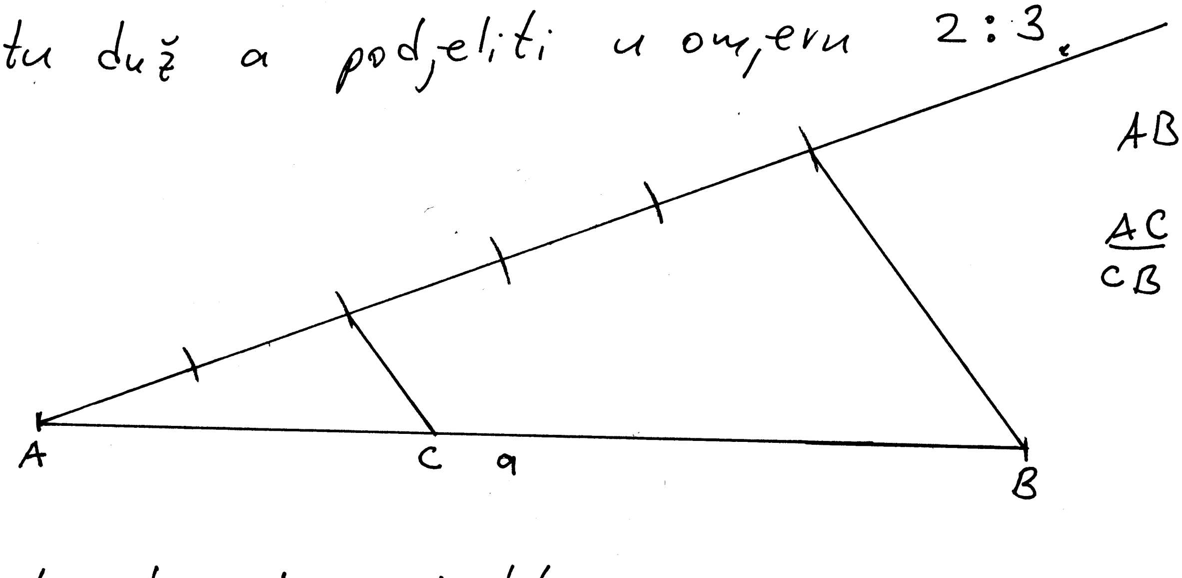
$\frac{x}{c}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c}=\frac{c}{x}$.

9. Datu duž a podjeliti u omjeru 2 : 3.

Rj.

$AB=a$

$\frac{AC}{CB}=\frac{2}{3}$

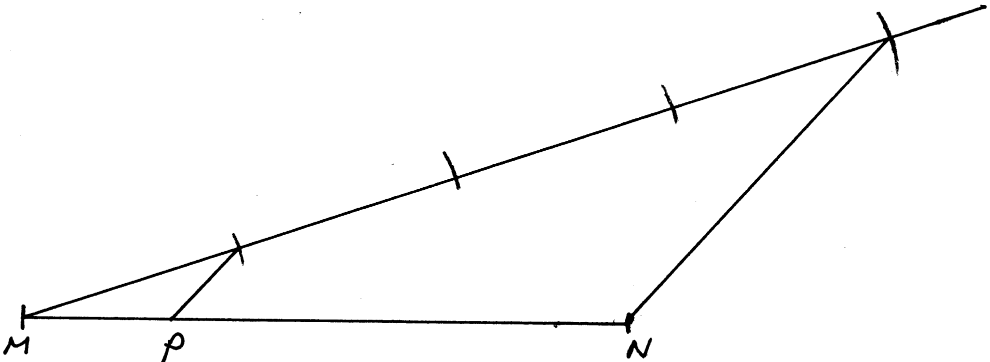


10. Datu duž b podjeliti u omjeru 1 : 3.

Rj.

$MN=b$

$\frac{MP}{PN}=\frac{1}{3}$



11. Dati su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ čije su odgovarajuće stranice proporcionalne u omjeru $2:1$. Ako je $\measuredangle ABC = 80^\circ$ izračunati uglove $\measuredangle A'B'C'$ i $\measuredangle B'A'C'$.

Rj.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \overset{\text{sl̆ič. SSS}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

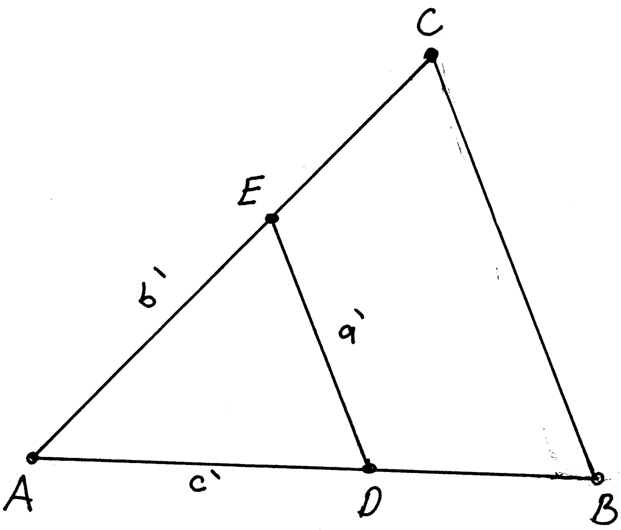
$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' = 80^\circ$$

Uglovi u trouglovima su podudarni, a kako ne znamo $\measuredangle BAC$ to ne možemo odrediti $\measuredangle B'A'C'$.

12. Na stranicama AB i AC trougla ΔABC uzete su tačke D i E takve da je $AD:DB = AE:EC = 3:2$. Ako je $P_{\Delta ADE} = 2\ cm^2$ odrediti $P_{\Delta ABC}$.

Rj.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{3} = \frac{BC}{DE}$$

(jasno je da $p(D,E) \parallel p(B,C)$)

$AD = \frac{3}{5} AB$, $AE = \frac{3}{5} AC$

i $DE = \frac{3}{5} BC$.

$$s' = \frac{AD + AE + DE}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3}{5} s$$

$$P_{\Delta ADE} = \sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}$$

$$P_{\Delta ADE} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 P_{\Delta ABC} \Rightarrow P_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{25}{9} = \frac{50}{9}\ cm^2$$

13. Na stranicama AB i AC trougla ΔABC uzete su tačke D i E takve da je $AD:DB = AE:EC = 4:3$. Ako je $O_{\Delta ADE} = 8\ cm$ odrediti $O_{\Delta ABC}$.

Rj. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{4}{3} \Rightarrow p(D,E) \parallel p(B,C) \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{7}{4} = \frac{BC}{ED}$

$AD = \frac{4}{7} AB$, $AE = \frac{4}{7} AC$, $DE = \frac{4}{7} BC$

$$O_{\Delta ADE} = a' + b' + c' = \frac{4}{7} O_{\Delta ABC} \Rightarrow O_{\Delta ABC} = \frac{7}{4} \cdot 8 = 14\ cm$$

Homotetija $\quad \mathcal{H}_{A,k}(M) \to M'$

Homotetija $\mathcal{H}_{A,k}$ (gdje je A centar homotetije, a k koeficijent homotetije) je transformacija ravni koja svakoj tački M u ravni pridružuje neku tačku M' tako da su tačke A, M i M' kolinearne pri čemu:

a) za $k>0$ vrijedi poredak $A-M-M'$ ili $A-M'-M$ (M i M' su sa iste strane tačke A), $\dfrac{AM'}{AM} = k$.

b) za $k<0$ tačka A je između M i M'

$$\frac{AM'}{AM} = |-k|$$

(Udaljenost M' do A je $AM' = |k| \cdot AM$)

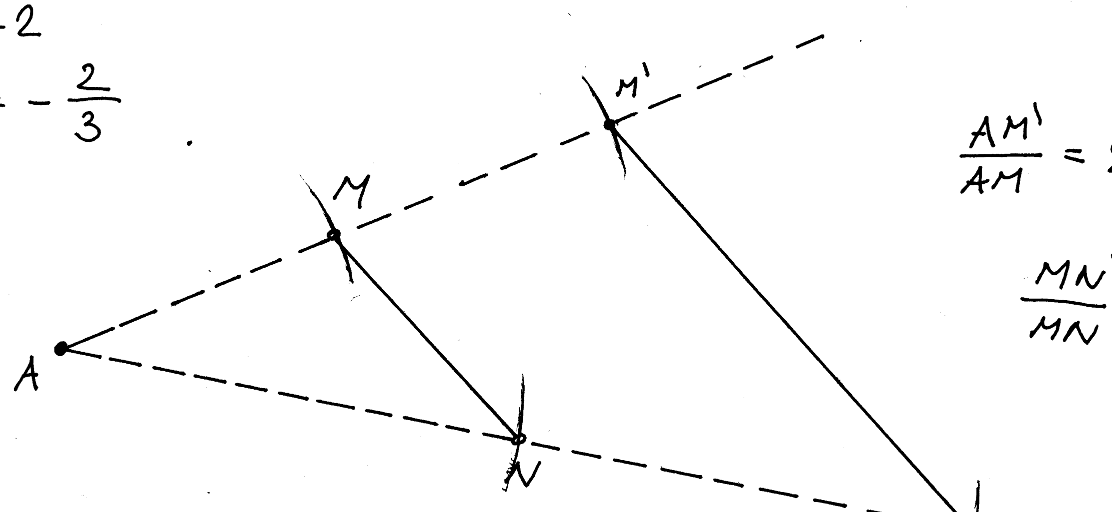
(14.) Data je tačka A i duž MN. Duž MN preslikati homotetično s centrom u tački A i koeficijentom

a) $k=2$

b) $k=-\dfrac{2}{3}$.

Rj.

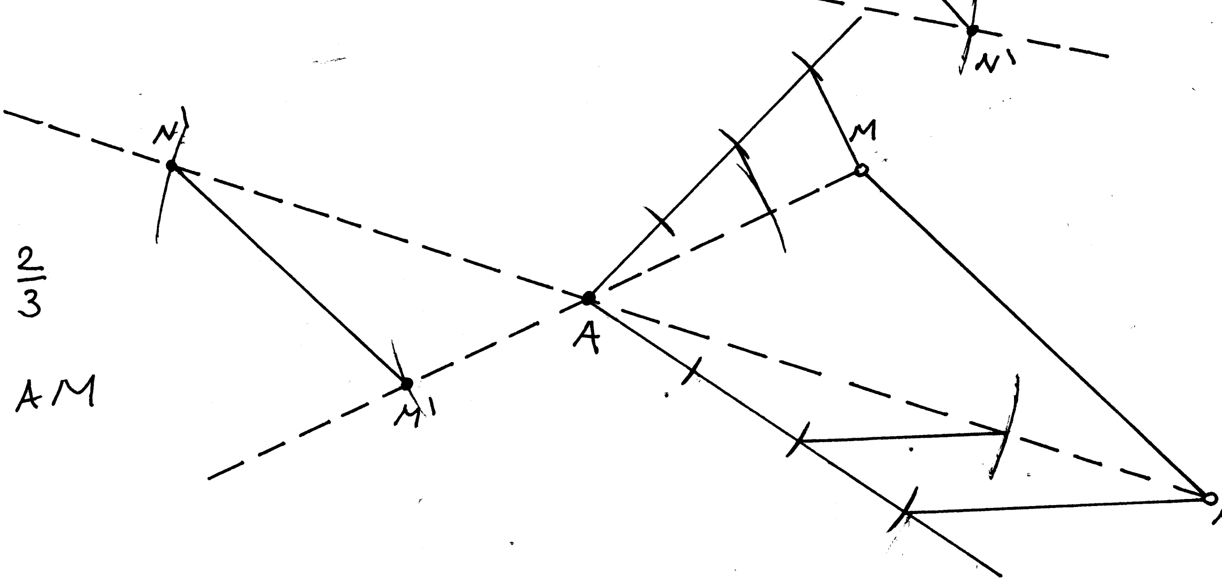
a)



$$\frac{AM'}{AM} = 2$$

$$\frac{MN'}{MN} = 2$$

b)



$$\frac{AM'}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$AM' = \frac{2}{3} AM$$

Primjetite da:
homotetija sa koeficijentom -1 je centralna simetrija
homotetija sa koeficijentom 1 je identitet

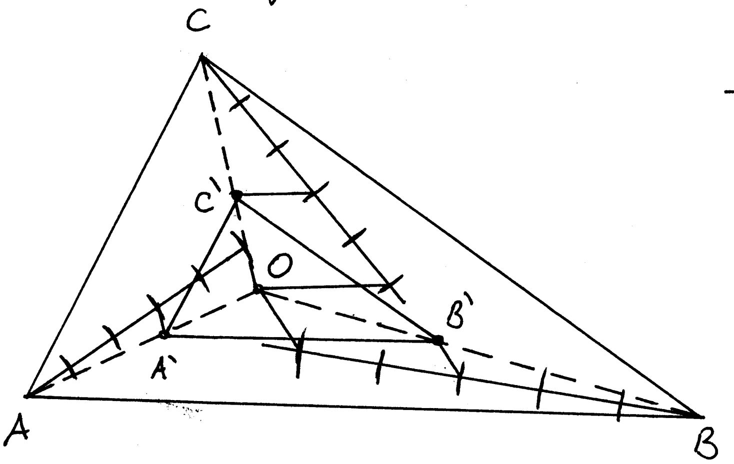
(15.) Dat je ΔABC i tačka O u unutrašnjosti trougla. Trougao preslikati homotetično sa centrom u tački O i koeficijentom

a) $k = \frac{2}{5}$

b)^{v} $k = \frac{1}{3}$.

Ako je $P_{\Delta ABC} = 56\ cm^2$ i $O_{\Delta ABC} = 30\ cm$ izračunati P i O novodobijenog trougla.

Rj. a)



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{2}{5}$$

Na osnovu 13 zadatka:

$$\frac{P_{\Delta A'B'C'}}{P_{\Delta ABC}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$P_{\Delta A'B'C'} = \frac{4}{25} \cdot 56 = \frac{224}{25}\ cm^2$$

Na osnovu 14 zadatka

$$\frac{O_{\Delta A'B'C'}}{O_{\Delta ABC}} = \frac{2}{5} \implies O_{\Delta A'B'C'} = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12\ cm.$$

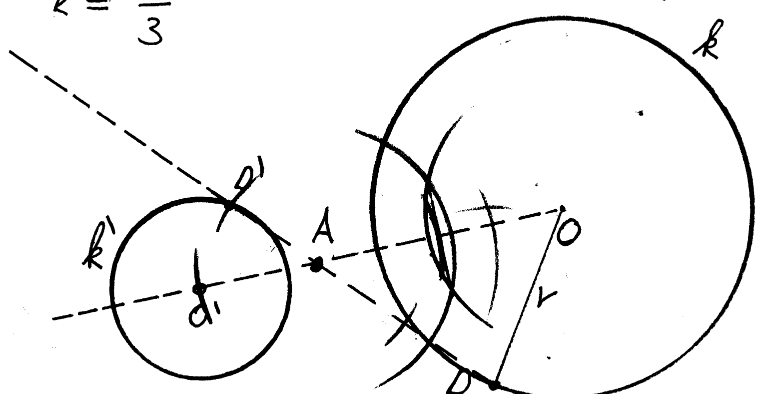
(16.) Data je kružnica k i tačka A. Preslikati datu kružnicu homotetično sa centrom u A i koeficijentom

a) $k = -\frac{1}{2}$

b)^{v} $k = \frac{2}{3}$

Odrediti omjer površina i obima kružnica.

Rj. a)



$O = 2r\pi$

$O' = 2r'\pi$

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{AO'}{AO} = \frac{r'}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{O'}{O} = |k|$$

$P = r^2\pi$

$P' = r'^2\pi$

$$\frac{P'}{P} = \frac{r'^2\pi}{r^2\pi}$$

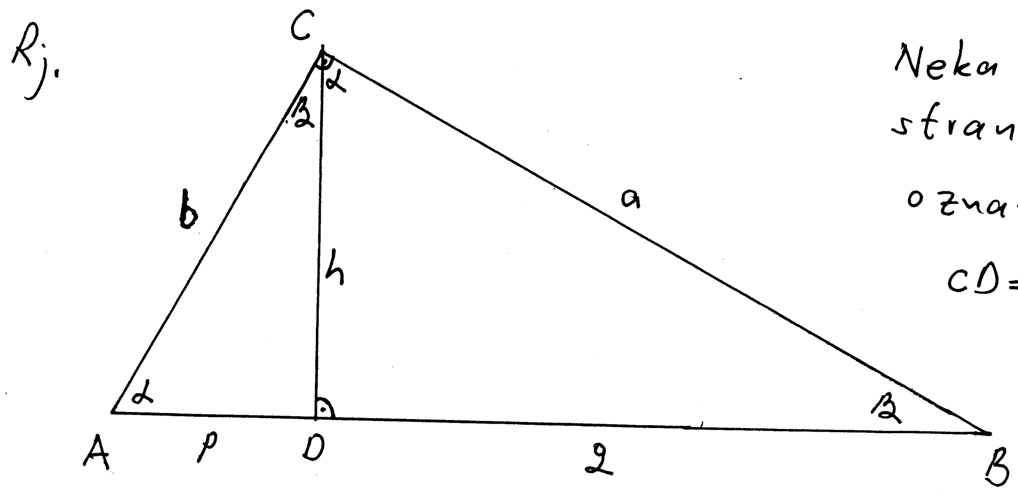
$$\frac{P'}{P} = |k|^2$$

Primjetite da:

- obimi homotetičnih figura se odnose kao $|k|$
- površine homotetičnih figura se odnose kao k^2
- izometrična preslikavanja (identitet, osna simetrija, centralna simetrija) čuvaju dužinu
- homotetija čuva uglove

17. U pravouglom trouglu ΔABC, a i b su kraci a c je hipotenuza ($BC=a$, $AC=b$, $AB=c$). Dokazati da je $a^2+b^2=c^2$.

Rj.



Neka je CD visina na stranicu c. Uvedimo oznake $AD=p$, $DB=q$, $CD=h$, $\measuredangle CAB=\alpha$ i $\measuredangle ABC=\beta$.

$c=p+q$

U ΔADC, $\measuredangle ADC=90^\circ$, $\measuredangle CAD=\alpha \Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

U ΔBCD, $\measuredangle BDC=90^\circ$, $\measuredangle DBC=\beta \Rightarrow \measuredangle BCD=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle ADC=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle CAD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle ACD=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC\sim\Delta ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{p} \Rightarrow b^2=cp \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACB=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAB=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle ABC=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ABC\sim\Delta BCD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{q} \Rightarrow a^2=cq \quad \ldots(2)$$

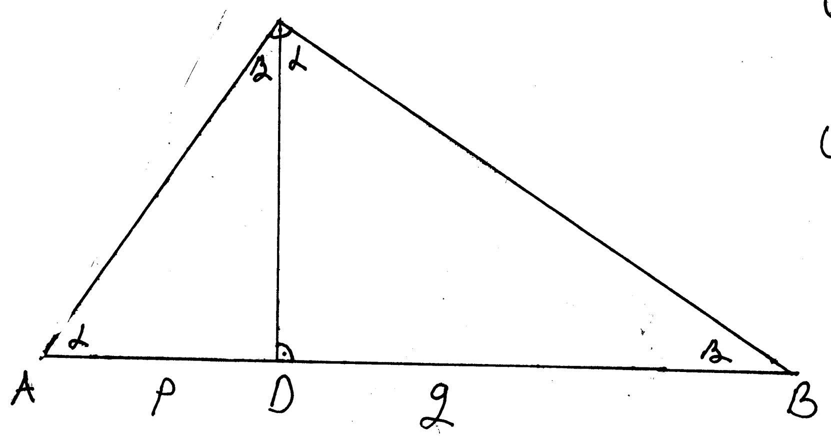
$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow a^2+b^2=cq+cp=c(p+q)=c\cdot c=c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

q.e.d.

18. U pravouglom trouglu ΔABC, duž AD je visina na hipotenuzu AB. Ako uvedemo oznake da je $AD=p$, $BD=q$ dokazati da je $CD=\sqrt{pq}$.

Rj.



Uvedimo oznake

$\measuredangle CAD=\alpha$; $\measuredangle ABC=\beta$

U ΔADC kako je

$\measuredangle DAC=\alpha$, $\measuredangle ADC=90^\circ$

$\Rightarrow \measuredangle ACD=\beta$

Slično $\measuredangle DCB=\alpha$.

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ADC=\measuredangle CDB=90^\circ\\ \measuredangle CAD=\measuredangle BCD=\alpha\\ \measuredangle DCA=\measuredangle DBC=\beta\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta ADC \sim \Delta CDB$$

$$\Downarrow$$

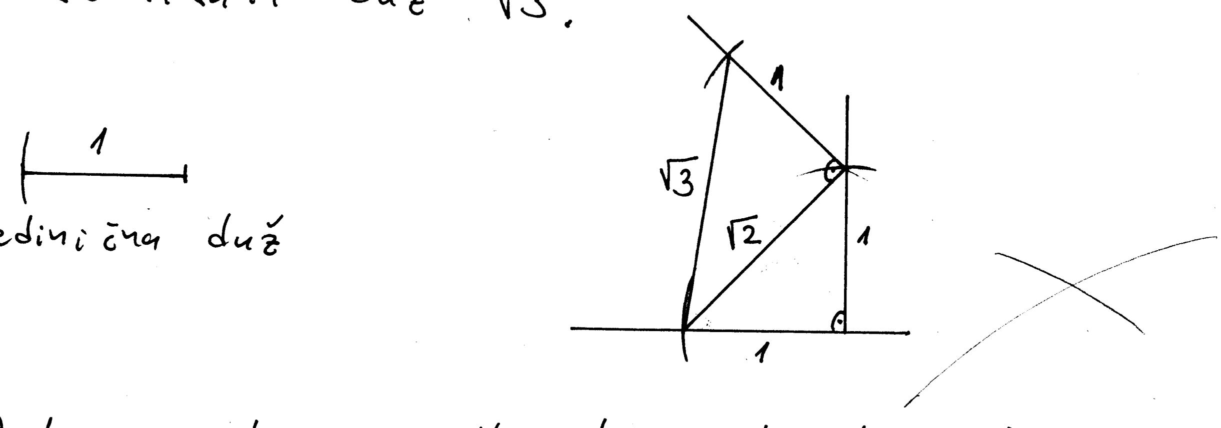
$$\frac{CD}{q}=\frac{p}{CD} \Rightarrow CD^2=pq$$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{pq}$$

q.e.d.

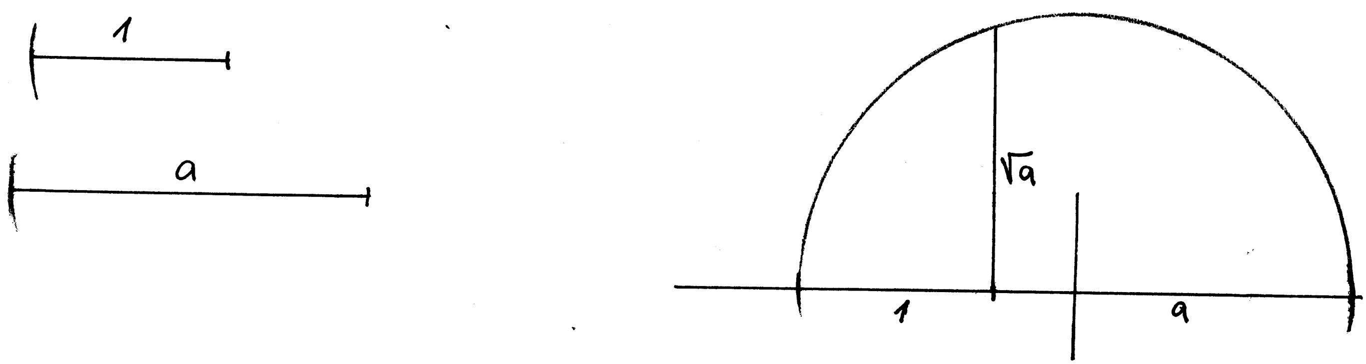
19. Konstruisati duž $\sqrt{3}$.

Rj.



20. Data je duž a. Konstruisati duž $\sqrt{a}$.

Rj.



21. Konstruisati duž $x = \frac{\sqrt{ab}}{a}$, ako su a i b date duži.

Rj.

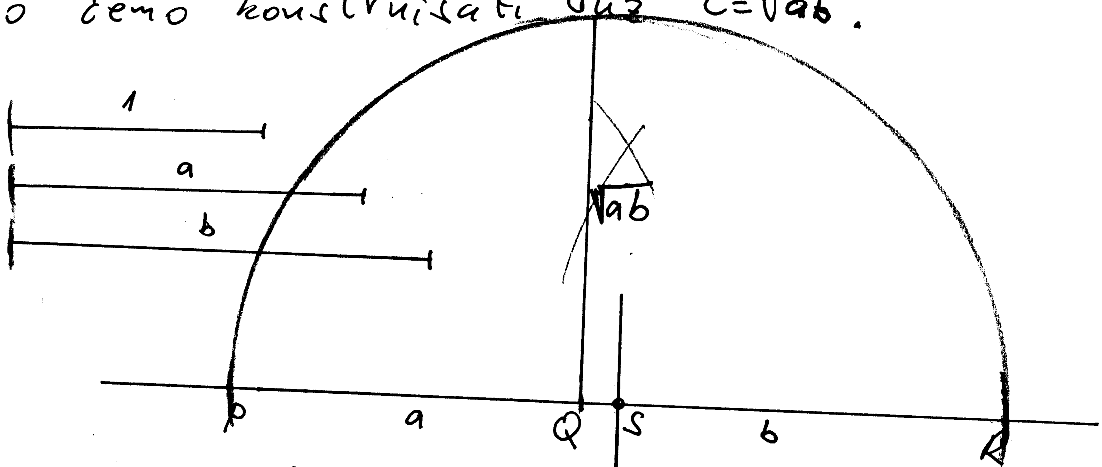
$x = \frac{\sqrt{ab}}{a}$ Prvo ćemo konstruisati duž $c = \sqrt{ab}$.

$c = \sqrt{ab}$

$x = \frac{c}{a}$

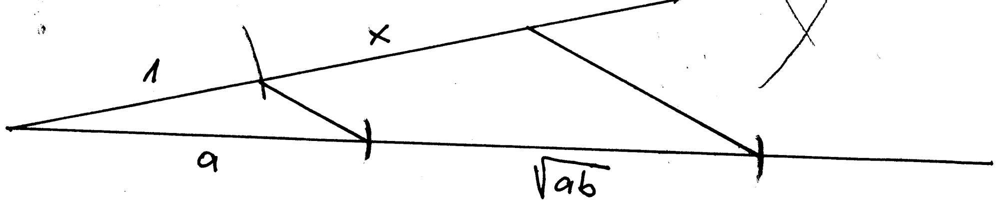
$\frac{x}{1} = \frac{c}{a}$

$\frac{a}{c} = \frac{1}{x}$



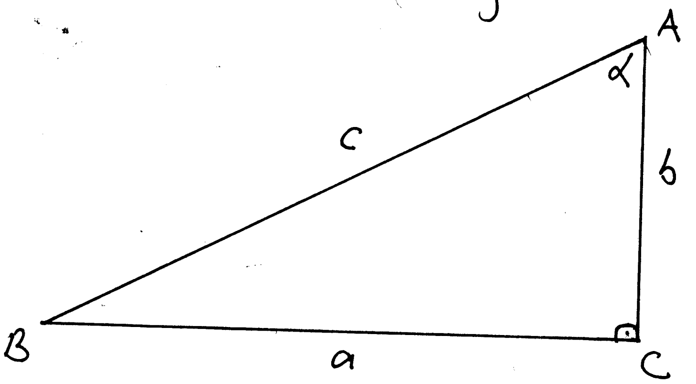
$PQ = a$
$QR = b$

S - centar kružnice



Trigonometrija

U pravouglom trouglu ΔABC sa kracima a, b, hipotenuzom c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$ definišemo



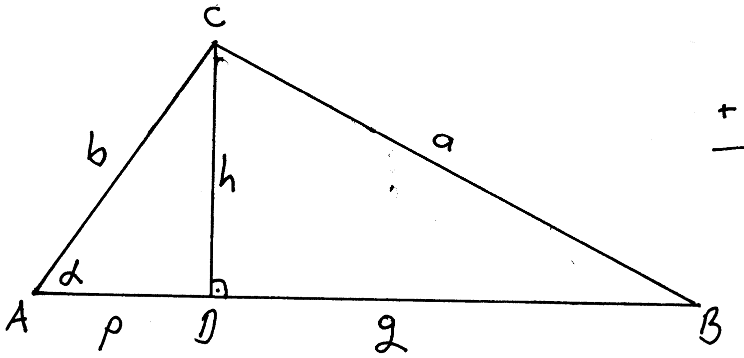
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$

22. (Kosinusna teorema)
Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglom $\alpha = \measuredangle BAC$. Dokazati da je
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Rj. Sa $CD = h$ označimo visinu spuštenu na stranicu $AB = c$.
Označimo sa p duž AD a sa q duž DB.



$$a^2 = h^2 + q^2$$
$$+\ h^2 = b^2 - p^2$$
$$a^2 = b^2 + q^2 - p^2$$
$$q^2 - p^2 = (c-p)^2 - p^2 = c^2 - 2pc$$

Imamo $a^2 = b^2 + c^2 - 2pc$, kako je $\cos\alpha = \frac{p}{b}$

tj. $p = b\cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

q.e.d.

23. (Sinusna teorema)

Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$.
Dokazati da je $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

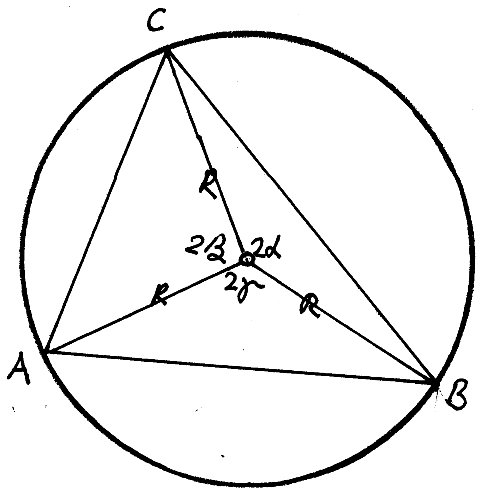
Uputa:

Ako uvedemo oznake kao u prethodnom zadatku imamo: $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, $\sin\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{h}{b}}{\frac{h}{a}}$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \ \ldots$$

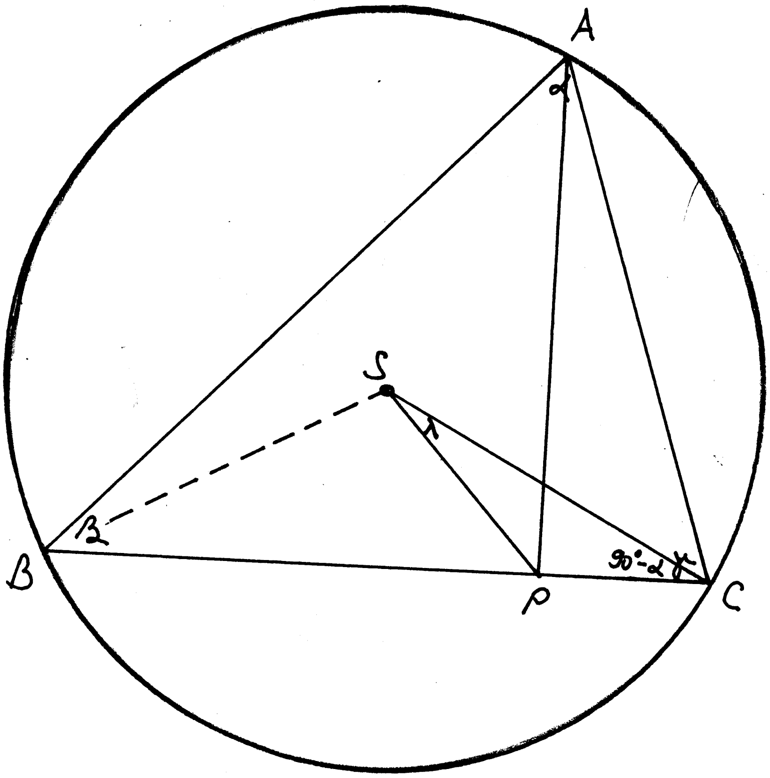
24. Dat je raznostraničan trougao ΔABC sa stranicama a, b, c i uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ i $\measuredangle BCA = \gamma$. Dokazati da je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ i $c = 2R\sin\gamma$.

Uputa:



(#) Neka je ΔABC oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30°$. Dokazati da je

$\measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$



Rj. Označimo sa $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$ i $\lambda = \measuredangle CSP$.

Treba dokazati da je

$\alpha + \lambda < 90°$.

Primetimo da je $\measuredangle BSC = 2\alpha$ i kako je ΔABC jkk $(BS = CS = R)$

$\Rightarrow \measuredangle BCS = 90° - \alpha$.

$AB = 2R \sin\gamma$, $AC = 2R\sin\beta$, $\cos\beta = \dfrac{BP}{AB}$, $\cos\gamma = \dfrac{PC}{AC}$

$$BP - PC = AB\cos\beta - AC\cos\gamma = 2R\sin\gamma\cos\beta - 2R\sin\beta\cos\gamma =$$
$$= 2R(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta) = 2R\sin(\gamma - \beta)$$

Iz pretpostavke zadatka je $\gamma \geq \beta + 30°$ tj. $\gamma - \beta \geq 30°$

$30° \leq \gamma - \beta < \gamma < 90° \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin(\gamma - \beta) < 1 \Rightarrow BP - PC \geq R$

tj. $BP \geq PC + R$. Na osnovu nejednakosti trougla

$$PS + R = PS + BS > BP \geq PC + R \Rightarrow PS > PC,$$

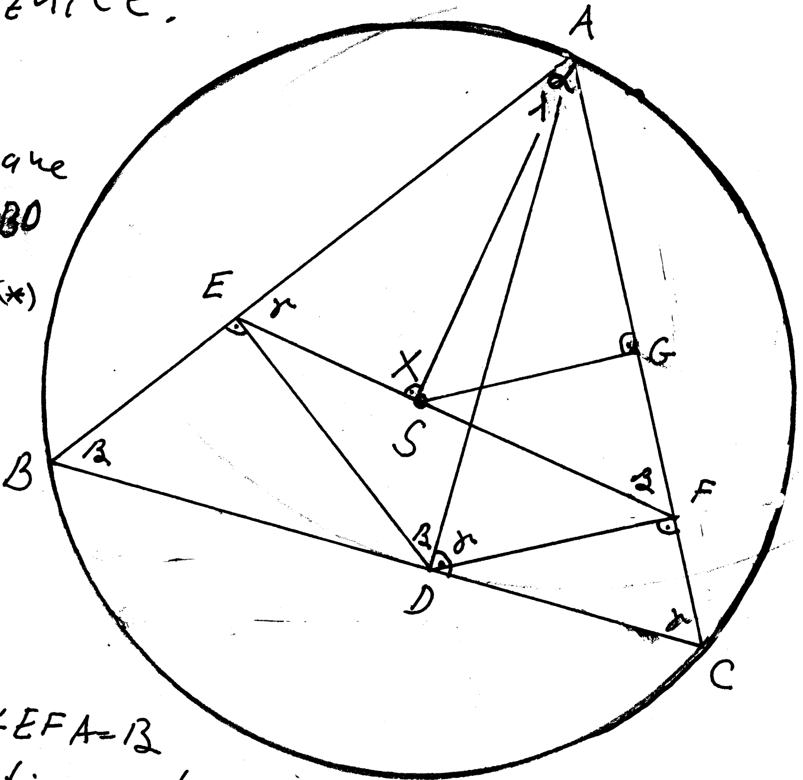
pa u ΔPCS imamo $\measuredangle PCS > \measuredangle PSC$ tj.

$$90° - \alpha > \lambda \Rightarrow \alpha + \lambda < 90°$$

$$\Rightarrow \measuredangle CAB + \measuredangle CSP < 90°$$

q.e.d.

(#) Neka je AD visina trougla ΔABC i R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Neka su tačke E i F podnožja normala iz tačke D na stranice AB i AC. Ako je $AD = R\sqrt{2}$, dokazati da prava EF prolazi kroz centar opisane kružnice.



Rj. Neka je S centar opisane kružnice Δ. Posmatrajmo ΔABD

$\sphericalangle ABD = \beta$, $\sphericalangle BDA = 90^\circ$, $\sphericalangle BAD = \lambda$ ...(*)

Posmatrajmo ΔAED.

$\sphericalangle AED = 90^\circ$, $\sphericalangle DAE = \lambda \overset{(*)}{\Longrightarrow} \sphericalangle ADE = \beta$

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AED = 90^\circ \\ \sphericalangle AFD = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \square AEDF$ tetivni

pa je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle EFA = \beta$.

U ΔAEF imamo $\sphericalangle FAE = \alpha$, $\sphericalangle EFA = \beta$

$\Rightarrow \sphericalangle AEF = \gamma$. Primjetimo da je i $\sphericalangle ADE = \gamma$ ($\square AEDF$ tetivni)

$\sin\beta = \frac{AD}{AB}$, $\sin\gamma = \frac{AF}{AD}$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$

$\Delta ABC \sim \Delta AEF$ (imaju sva tri podudarna ugla), pa je

$$\frac{AB}{AF} = \frac{\frac{AD}{\sin\beta}}{AD\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = \frac{2R\cdot 2R}{b\cdot c} = \frac{\frac{abc}{2P}\cdot 2R}{bc} = \frac{a\cdot 2R}{2P} = \frac{a\,2R}{a\cdot AD} = \frac{2R}{R\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ako iz S spustim visinu SG na AC primjetimo da je $\sphericalangle ASG = \beta$ ($\sphericalangle ASC = 2\beta$) pa je $\sphericalangle GAS = 90^\circ - \beta$.

Neka je AX visina ΔAEF. Zbog uočene sličnosti

$$\frac{AD}{AX} = \sqrt{2} \Longrightarrow AX = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = R.$$

Primjetimo da je $\sphericalangle FAX = 90^\circ - \beta$.

$$\left.\begin{array}{l} AF \cong AF \\ \sphericalangle FAX \cong \sphericalangle FAS \\ AX \cong AS = R \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta FAX \cong \Delta FAS$$

$$\Downarrow$$

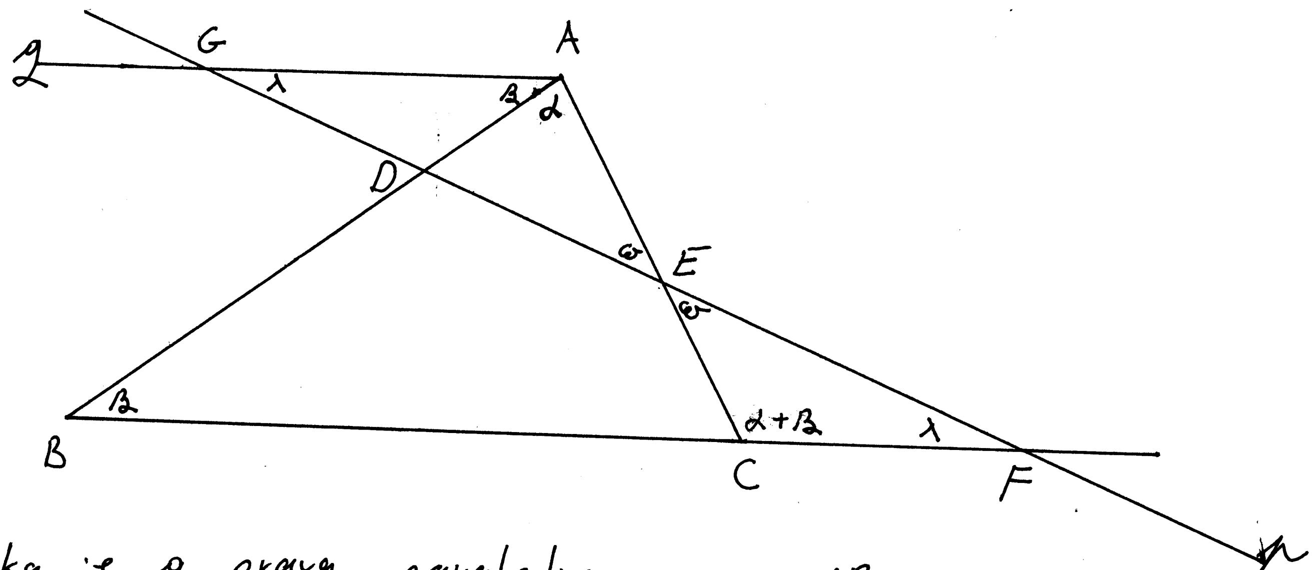
$$S \equiv X \Longrightarrow S \in EF$$

q.e.d.

(#) (Menelaus-ova teorema)
Neka je dat trougao ΔABC i neka prava p siječe stranice trougla AB, BC i AC (po potrebi produžiti stranice) redom u tačkama D, E i F. Tada je

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$ Dokazati.

Rj.



Neka je g prava paralelna sa $p(B,C)$ i $\{G\} = p \cap g$

$p(B,C) \parallel p(A,G)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAG = \beta$
$p(B,C) \parallel p(A,G)$ i $p(F,G)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle BFD \cong \sphericalangle AGD = \lambda$
$\sphericalangle BAC = \alpha \Rightarrow \sphericalangle EAG = \alpha + \beta$
$\sphericalangle FCD$ vanjski ugao $\Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle FCE = \alpha + \beta$.

Posmatrajmo ΔECF i ΔEAG

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AGE \cong \sphericalangle CFE = \lambda \\ \sphericalangle GEA \cong \sphericalangle FEC = \omega \text{ (unakrsni uglovi)} \\ \sphericalangle EAG \cong \sphericalangle ECF = \alpha+\beta \end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \Delta EAG \sim \Delta ECF$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AG}{CF} = \frac{AE}{CE}$$

tj. $$\frac{AG}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1 \quad \ldots (*)$$

Posmatrajmo ΔDAG i ΔBFD

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AGD \cong \sphericalangle BFD = \lambda \\ \sphericalangle GDA \cong \sphericalangle FDB \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle DAG \cong \sphericalangle DBF = \beta \end{array}\right\} \overset{\text{slič. UUU}}{\Longrightarrow} \Delta AGD \sim \Delta BFD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AG}{BF} \Rightarrow \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{AG} = 1 \quad \ldots (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$$

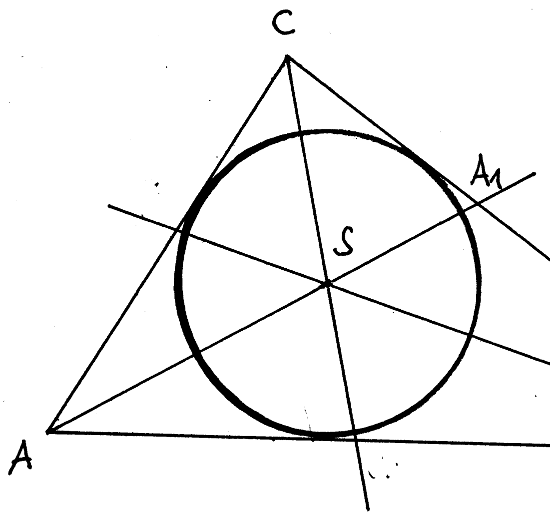
q.e.d.

(#) Neka je AA_1 simetrala ugla kod A trougla $\triangle ABC$ a S centar upisane kružnice. Dokazati da je $AS : SA_1 = (AB + AC) : BC$

Rj.

Označimo sa S centar upisane kružnice trougla

$\{A_1\} = p(A,S) \cap BC$



Dokažimo da je

$$\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB+AC}{BC}.$$

$$\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB}{BA_1} \quad \ldots(*) \qquad \frac{AS}{SA_1} = \frac{AC}{CA_1} \quad \ldots(**) \qquad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC\frac{BA_1}{CA_1} \text{ i } AC = AB\frac{CA_1}{BA_1}$$

$$(*) + (**) \Rightarrow 2\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB}{BA_1} + \frac{AC}{CA_1} = \frac{AB \cdot \frac{BC}{BA_1} + AC \cdot \frac{BC}{CA_1}}{BC} =$$

$$= \frac{AB \cdot \frac{BA_1 + CA_1}{BA_1} + AC\frac{BA_1 + CA_1}{CA_1}}{BC} = \frac{AB\left(1 + \frac{CA_1}{BA_1}\right) + AC\left(1 + \frac{BA_1}{CA_1}\right)}{BC}$$

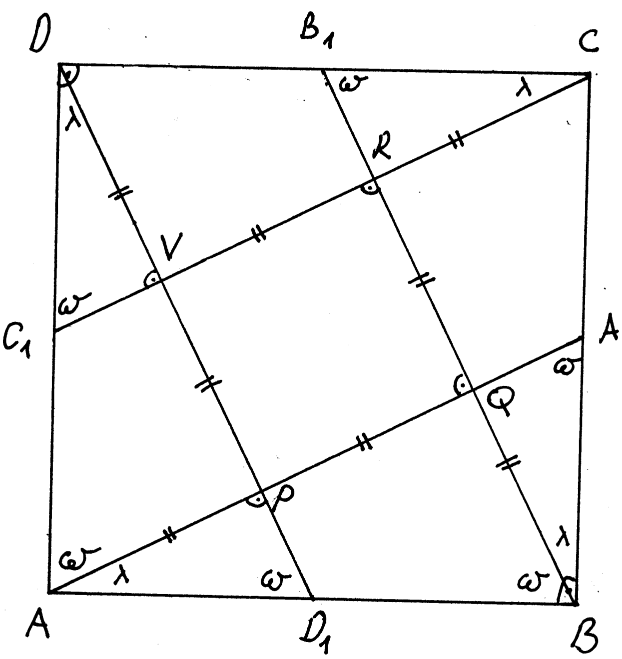
$$= \frac{AB + AC + AB\frac{CA_1}{BA_1} + AC\frac{BA_1}{CA_1}}{BC} = \frac{2AB + 2AC}{BC}$$

tj. $2\frac{AS}{SA_1} = 2\frac{AB+AC}{BC} \Rightarrow \frac{AS}{SA_1} = \frac{AB+AC}{BC}$

q.e.d.

(#) A_1, B_1, C_1, D_1 su tačke koje su redom sredine stranica BC, CD, AD i AB kvadrata $\square ABCD$. Dokazati da se duži AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 sijeku tako da obrazuju kvadrat sa stranicom jednakom $\frac{2}{5}$ dužine svake od tih duži.

Rj.



Označimo sa

$\{P\} = DD_1 \cap AA_1$,

$\{Q\} = AA_1 \cap BB_1$

$\{R\} = BB_1 \cap CC_1$

$\{V\} = CC_1 \cap DD_1$

Dokažimo da je $\square PQRV$ kvadrat i da je $PQ = \frac{2}{5} A$.

$$\left.\begin{array}{l} DC \cong AB \\ \sphericalangle ABA_1 \cong \sphericalangle CDC_1 = 90^\circ \\ DC_1 \cong A_1B \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta CDC_1 \cong \Delta ABA_1$$

$\Downarrow$

$\sphericalangle C_1CD \cong \sphericalangle A_1AB = \lambda$ i $\sphericalangle DC_1C \cong \sphericalangle BA_1A = \omega$

Primijetimo da je $\lambda + \omega = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle DAA_1 = \omega \Rightarrow p(C, C_1) \parallel p(A, A_1)$.

$$\left.\begin{array}{l} AD = DC \\ \sphericalangle DAD_1 = \sphericalangle CDC_1 = 90^\circ \\ AD_1 = DC_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta DAD_1 \cong \Delta CDC_1$$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ADD_1 = \sphericalangle C_1CD = \lambda$ i $\sphericalangle AD_1D = \sphericalangle DC_1C = \omega$

$\Rightarrow \sphericalangle C_1VD \cong \sphericalangle D_1PA = 90^\circ$,

$$\left.\begin{array}{l} AD \cong BC \\ \sphericalangle DAD_1 \cong \sphericalangle BCB_1 = 90^\circ \\ AD_1 \cong CB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta DAD_1 \cong \Delta BCB_1$$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ADD_1 \cong \sphericalangle B_1BC = \lambda$ i $\sphericalangle AD_1D \cong \sphericalangle CB_1B = \omega$

pa je $\sphericalangle ABB_1 = \omega \Rightarrow p(D, D_1) \parallel p(B, B_1)$.

Kako je $\sphericalangle BQA_1 = \sphericalangle CRB_1 = 90^\circ \Rightarrow \square PQRV$ pravougaonik

$p(B, B_1) \parallel p(D, D_1) \xrightarrow{T_oT_o} \frac{CB_1}{DB_1} = \frac{CR}{RV} \Rightarrow CR = RV \Rightarrow R$ sredina duži VC

$p(A, A_1) \parallel p(C, C_1) \xrightarrow{T_oT_o} \frac{DC_1}{AC_1} = \frac{DV}{VP} \Rightarrow DV = VP \Rightarrow V$ sredina duži DP.

Kako su ΔAPD i ΔCDV podudarni $\Rightarrow PD \cong CV \Rightarrow PV = RV$

$\Rightarrow \square PQRV$ kvadrat q.e.d.

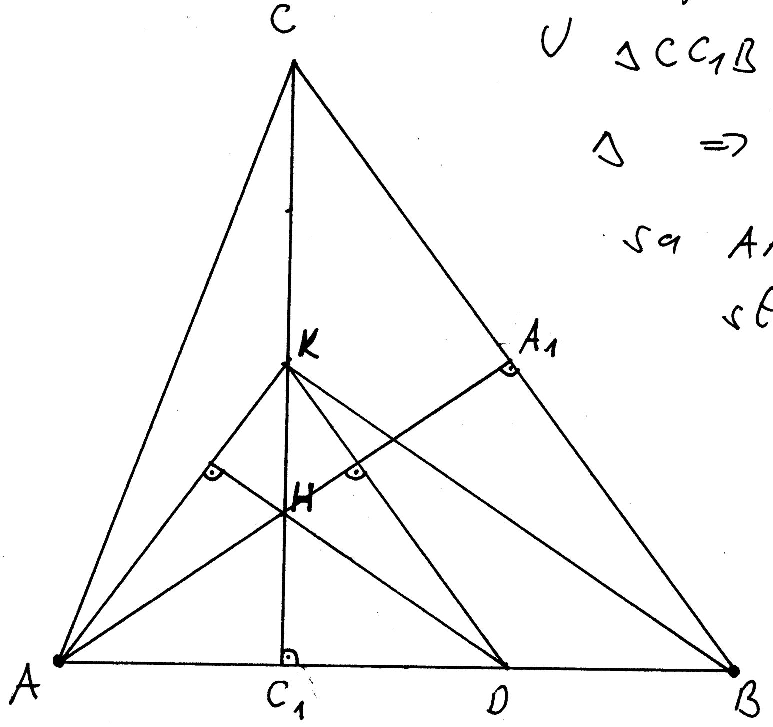
$p(D, D_1) \parallel p(B, B_1) \xrightarrow{T_oT_o} \frac{BQ}{PD_1} = \frac{AB}{AD_1} = 2 \Rightarrow BQ = 2PD_1$ a kako $BQ = VP$

$\rightarrow (AA_1 \cong BB_1 \cong CC_1 \cong DD_1)$

$\Rightarrow DD_1 = 5PD_1 \Rightarrow VP = PQ = QR = RV = \frac{2}{5} DD_1$ q.e.d.

(#) U oštrouglom trouglu ΔABC je $CH:HC_1 = 3:1$, gdje je H ortocentar a C_1 podnožje visine iz vrha C. Neka je K sredina visine CC_1. Dokazati da je $\measuredangle AKB = 90°$.

Rj. $\frac{CH}{HC_1} = \frac{3}{1}$. Dokažimo da je $\measuredangle AKB = 90°$.



Neka je tačka D sredina duži BC_1

U ΔCC_1B, KD je srednja linija

$\Delta \Rightarrow KD \parallel BC$, pa ako sa AA_1 označimo visinu na stranicu BC imamo

$AA_1 \perp KD$.

U ΔADK, H je ortocentar trougla pa je

$p(D,H) \perp AK$. ...(*)

Iz $\frac{CH}{HC_1} = \frac{3}{1}$ i $\frac{CK}{KC_1} = \frac{1}{1} \Rightarrow H$ sredina duži KC_1

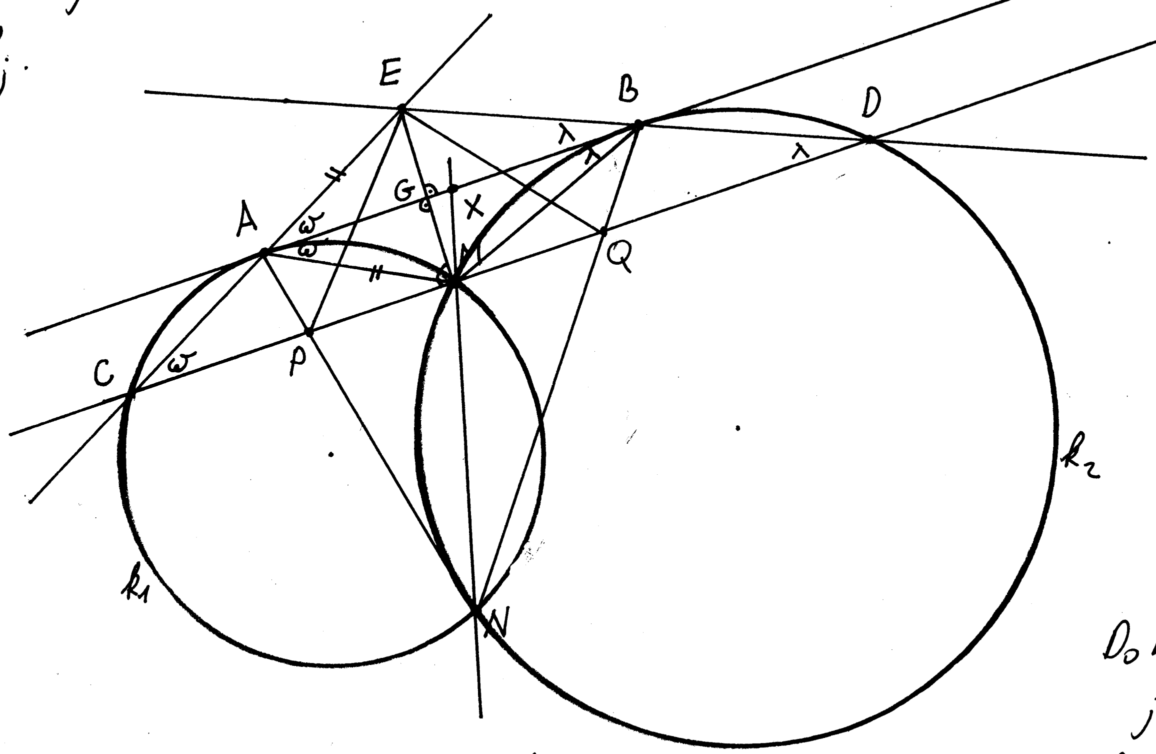
$\frac{C_1H}{HK} = \frac{C_1D}{DB} = \frac{1}{1} \Rightarrow p(D,H) \parallel p(B,K)$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \measuredangle AKB = 90°$

q.e.d.

Date su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u tačkama M i N i imaju zajedničku tangentu $p(A,B)$ $(A \in k_1,\ B \in k_2)$. M je tačka na pravoj $p(C,D)$ $(C \in k_1,\ D \in k_2)$ takva da je $C-M-D$ i $p(C,D) \parallel p(A,B)$. Tetive NA i CM se sijeku u tački P, tetive NB i MD se sijeku u tački Q, a prave $p(A,C)$ i $p(B,D)$ se sijeku u tački E. Dokazati da je $PE \cong QE$.

Rj.



Dokažimo da je $PE = QE$.

Ugao između tangente i tetive jednak je periferijskom uglu nad tom tetivom $\Rightarrow \measuredangle MDB = \measuredangle MBA = \lambda$ i $\measuredangle ACM = \measuredangle BAM = \omega$.

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAM = \measuredangle EAB = \omega$.

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(B,D)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BDM = \measuredangle EBA = \lambda$.

Trouglovi $\triangle AEB$ i $\triangle AMB$ imaju jednaka dva ugla λ i ω i zajedničku stranicu AB $\xRightarrow{USU}$ $\triangle ABE \cong \triangle ABM$. Neka je $\{G\} = AM \cap AB$

$$\Downarrow$$
$$AE \cong AM$$

Trouglovi $\triangle AGE$ i $\triangle AGM$ imaju zajedničke dvije stranice i ugao između njih pa $\xRightarrow{SUS}$ $\triangle AGE \cong \triangle AGM$

$$\Downarrow$$
$$\measuredangle AGE \cong \measuredangle AGM = 90^\circ$$

Kako je $EM \perp AB$ i $AB \parallel CD$ $\Rightarrow EM \perp CD$. Dokažimo još da je $PM = QM$.

Neka je $\{X\} = p(M,N) \cap AB$.

$$XA^2 = XM \cdot XN = XB^2 \Rightarrow AX^2 = BX^2 \Rightarrow AX = BX$$

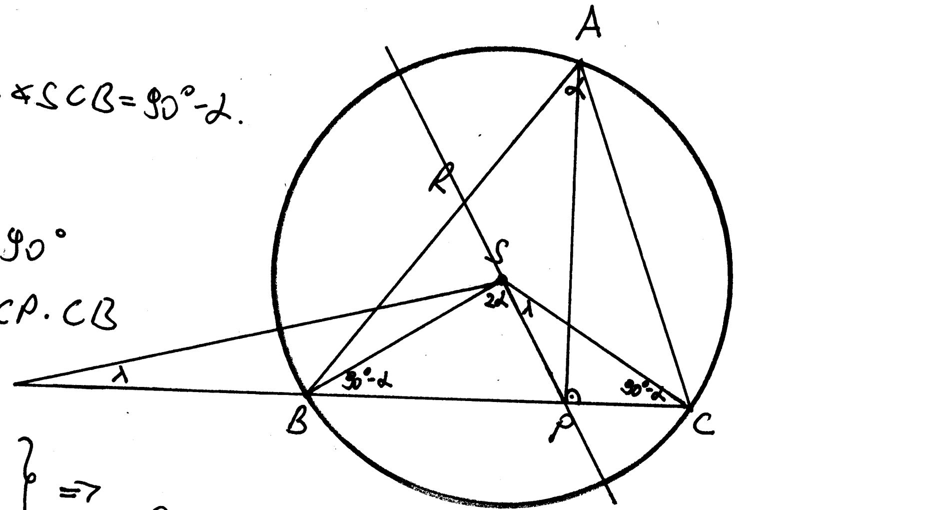
$$p(A,B) \parallel p(C,D) \xRightarrow{T_oT_o} \frac{AX}{XB} = \frac{PM}{MQ} \Rightarrow PM = QM$$

U $\triangle PME$ i $\triangle QME$ iz SUS $\Rightarrow \triangle PME \cong \triangle QME \Rightarrow PE \cong QE$

q.e.d.

Neka je ΔABC oštrougli trougao sa centrom opisane kružnice u tački S. Tačka $P \in BC$ je ortogonalna projekcija tačke A. Pretpostavimo da je $\sphericalangle BCA \geq ABC + 30°$. Dokazati da je $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90°$.

Rj.



Primetimo da je $\sphericalangle SBC = \sphericalangle SCB = 90° - \alpha$.

Označimo sa $\lambda = \sphericalangle CSP$.

Dokažimo da je $\alpha + \lambda < 90°$

Prvo pokažimo da je $R^2 > CP \cdot CB$

$$\left.\begin{array}{l} CB = 2R\sin\alpha \\ CP = AC\cos\gamma = 2R\sin\beta\cos\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow CB \cdot CP = 4R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$$

Dovoljno je pokazati da je $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma < \frac{1}{4}$.

$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta < 1 \quad \ldots(1)$

$\frac{1}{2} \leq \sin(\gamma - \beta) = \sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma \quad /\cdot(-1)$

$\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta \leq -\frac{1}{2} \quad \ldots(2)$

$(1)+(2) \quad \sin\beta \cdot \cos\gamma < \frac{1}{4}$

$\xRightarrow{\sin\alpha < 1} \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma < \frac{1}{4}$

pa je $R^2 > CP \cdot CB \quad \ldots(*)$

I način

Izaberimo tačku J na $p(B,C)$ takvu da je $CJ \cdot CP = R^2$. Kako je

$R^2 > CP \cdot CB \Rightarrow CJ > CB \Rightarrow \sphericalangle SBC > \sphericalangle SJC$.

$R^2 = SC^2 \Rightarrow \frac{SC}{CJ} = \frac{PC}{SC}$ pa iz sličnosti SUS $\Rightarrow \Delta JCS \sim \Delta SCP$

$\Downarrow$

$\sphericalangle SJC = \sphericalangle CSP = \lambda$

$\Rightarrow \lambda < \sphericalangle SBC = 90° - \alpha \Rightarrow \alpha + \lambda < 90° \Rightarrow \sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90°$

q.e.d.

II način

$BP \cdot PC = (R + SP)(R - SP) \Rightarrow BP \cdot PC = R^2 - SP^2$

$SP^2 = R^2 - BP \cdot PC \overset{(*)}{>} PC \cdot CB - BP \cdot PC = PC^2 \Rightarrow SP > PC$

Pa u $\Delta SPC \quad 90° - \alpha > \lambda \Rightarrow \alpha + \lambda < 90°$

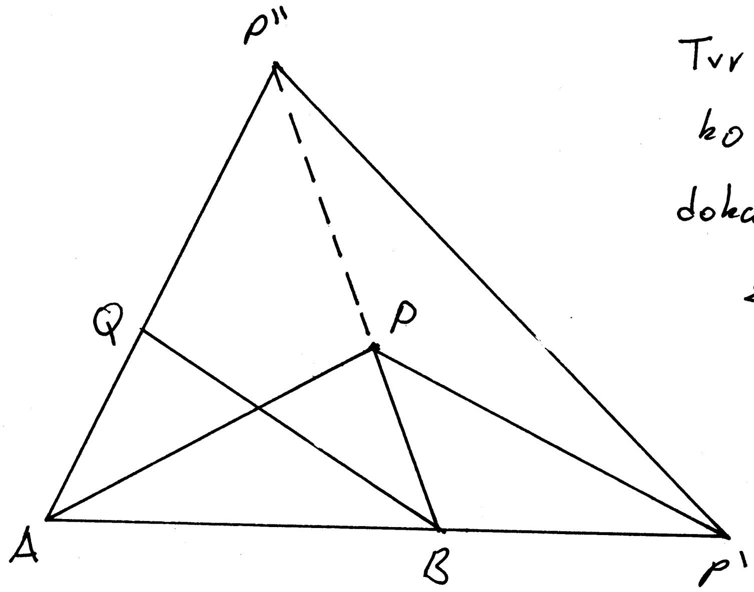
$\Downarrow$

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle CSP < 90°$

q.e.d.

(#) U trouglu ΔABC, AP polovi $\measuredangle BAC$, sa tačkom P na BC, i duž BQ polovi $\measuredangle ABC$, sa Q na CA. Zna se da je $\measuredangle BAC = 60°$ i da je $AB + BP = AQ + QB$. Naći uglove u Δ.

Rj: Označimo uglove u ΔABC sa α, β i γ. $\alpha = 60°$. Produžimo AB do P' tako da je $BP' = BP$, i konstruišimo P'' na AQ tako da je $AP'' = AP'$. Tad je $\Delta BP'P$ jednakokraki sa uglom na bazi $\frac{\beta}{2}$. Kako je $AQ + QP'' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB$, slijedi da je $QP'' = QB$. Kako je $\Delta APP''$ jkS i AP polovi ugao kod A, imamo $PP' = PP''$



Tvrdnja: Tačke B, P, P'' su kolinearne, pa je $P'' \equiv C$.

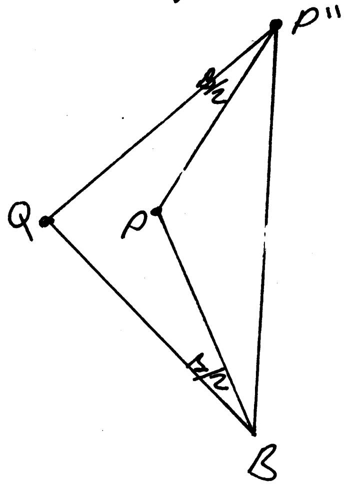
dokaz: Pretpostavimo suprotno tvrdnji.

$\measuredangle PBQ = \measuredangle PP'B = \measuredangle PP''Q = \frac{\beta}{2}$.

Tako da imamo slučaj kao na slici, ili je P na drugoj strani BP''.

U bilo kojem slučaju, pretpostavka da je $\Delta BPP''$ raznostraničan vodi nas na $BP = PP'' = PP'$ pa zaključujemo da je $\Delta BPP''$ jks, i na kraju do apsurda da $\frac{\beta}{2} = 60°$ pa $\alpha + \beta = 60° + 120° = 180°$.

#



Prema tome, tačke B, P, P'' su kolinearne i $P'' \equiv C$ q.e.d.

Kako je ΔBCQ jkk, imamo $120° - \beta = \gamma = \frac{\beta}{2}$ pa $\beta = 80°$ i $\gamma = 40°$.

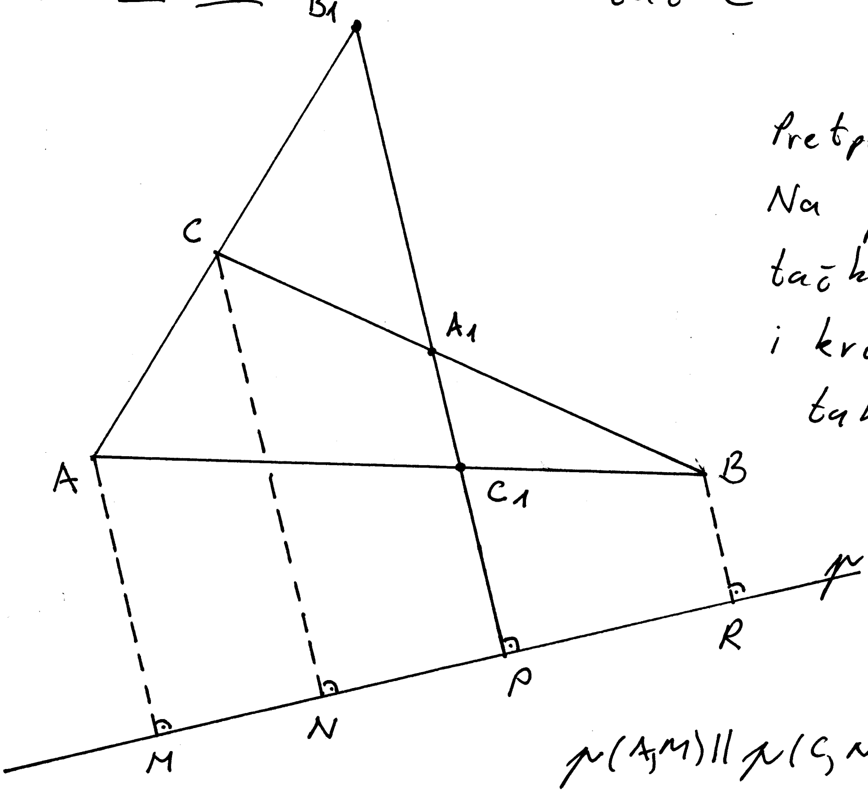
$\alpha = 60°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 40°$ tražene vrijednosti

(#) (Menelausova teorema, drugi put)

Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla ΔABC ili na njihovim produžecima tako da dvije tačke pripadaju stranici a jedna na produžetku. Dokazati da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne ako i samo ako vrijedi $\dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$.

Rj. potreban uslov

" $\Leftarrow$ ": A_1, B_1, C_1 kolinearne tačke $\Rightarrow \dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$.



Pretpostavimo $C_1 \in AB$, $A_1 \in BC$.
Na polupravoj $pp[A_1, C_1)$ uzmimo tačku P tako da je $A_1 - C_1 - P$ i kroz P postavimo pravu p takvu da je $p \perp p(A_1, C_1)$.
Neka su M, N i R ortogonalne projekcije tačaka A, C i B redom.

$$p(A,M) \parallel p(C,N) \parallel p(B_1,P) \parallel p(B,R) \xRightarrow{\text{To } T_0}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{MP}{PR}, \quad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{PR}{PN}, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{PN}{MP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{MP}{PR} \cdot \frac{PR}{PN} \cdot \frac{PN}{MP} = 1 \Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$

q.e.d.

dovoljan uslov

" $\Rightarrow$ ": $\dfrac{AC_1}{BC_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1 \quad \ldots(*) \Rightarrow$ tačke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne

Ponovo, neumanjujući opštost pretpostavimo $C_1 \in AB$ i $A_1 \in BC$.

$p(A_1, B_1) \cap AB = \{C_2\} \Rightarrow$ tačke A_1, B_1 i C_2 kolin. $\xRightarrow{\text{potreban uslov}} \dfrac{AC_2}{BC_2} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{CB_1}{AB_1} = 1$

$\xRightarrow{(*)} \dfrac{AC_2}{BC_2} = \dfrac{AC_1}{BC_1}$, $C_1, C_2 \in AB$ pa zbog jedinstvenosti podjele duži u datom omjeru $\Rightarrow C_1 \equiv C_2 \Rightarrow A_1, B_1, C_1$ kolinea.

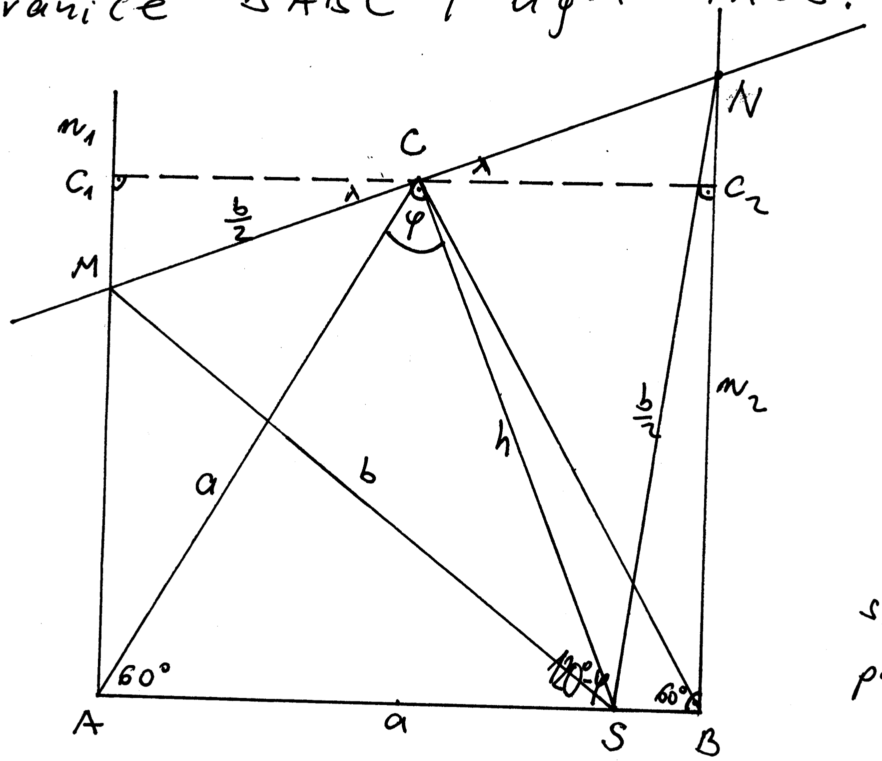
q.e.d.

(#) Kroz temena A i B jednakostraničnog trougla ΔABC konstruisane su normale n_1 i n_2 na AB u istoj poluravni u kojoj je tačka C. Kroz teme C konstruisana je proizvoljna prava koja siječe n_1 u M i n_2 u N. Simetrala duži MN siječe pravu AB u tački S.

a) dokazati da je ΔMSN jednakostranični

b) površinu trougla ΔMSN izraziti kao f-ju dužine stranice ΔABC i ugla $\measuredangle ACS$.

Rj.



a) Dokažimo da je ΔMSN j.k.s.

Primjetimo da je tačka C jednako udaljena od normala n_1 i n_2 (C leži na simetrali stranice AB) pa iz pravila USU $\Delta MCC_1 \cong \Delta NCC_2$

$$\Downarrow$$

$$MC \cong CN$$

$$\left.\begin{array}{l} MC \cong CN \\ \measuredangle MCS \cong \measuredangle NCS = 90° \\ CS \cong CS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta MCS \cong \Delta NCS$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong NS \Rightarrow \Delta MSN \text{ jkk}$$

$\square CSBN$ je tetivni četverougao ($\measuredangle NCS + \measuredangle SBN = 180°$), pa ako posmatramo uglove koji gledaju na stranicu CS

$$\Rightarrow \measuredangle SBC \cong \measuredangle SNC = 60° \Rightarrow \Delta MSN \text{ jks} \quad \text{q.e.d.}$$

b) $AB = AC = BC = a$, $\measuredangle ACS = \varphi \Rightarrow \measuredangle ASC = 120° - \varphi$, $CS = h$, $MS = NS = MN = b$

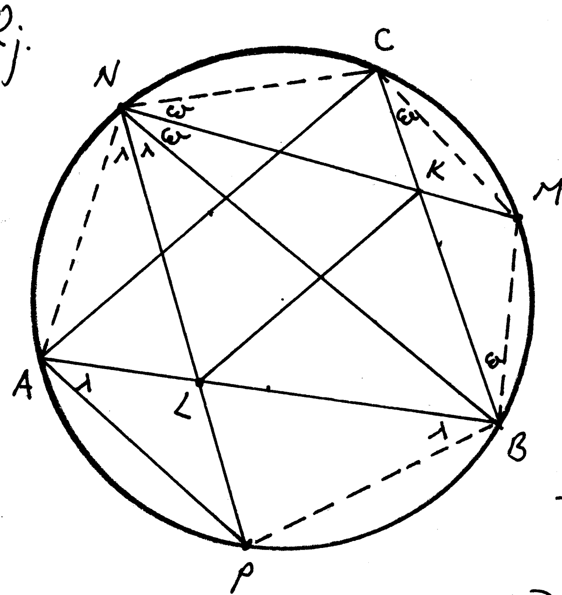
Površinu ΔMSN izrazimo preko AB i $\measuredangle ACS$.

$$P_{\Delta MSN} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}, \quad h = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{a}{\sin(120° - \varphi)} = \frac{h}{\sin 60°} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin(120° - \varphi)}$$

$$\Rightarrow \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin(120° - \varphi)} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin(120° - \varphi)} \Rightarrow P_{\Delta MSN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sin^2(120° - \varphi)}$$

\# U kružnicu je upisan trougao $\triangle ABC$. Tačke M, N i P su središta lukova BC, CA i AB. Tačka M se nalazi sa one strane prave BC sa koje nije tačka A, tačka N se nalazi sa one strane prave AC sa koje nije tačka B i tačka P se nalazi sa one strane prave AB sa koje nije tačka C. Tetiva MN siječe stranicu BC u tački K, a NP siječe stranicu AB u tački L. Dokazati da je $KL \parallel AC$.

Rj.



Spojimo tačke B i N.
Dokazaćemo da je $p(N,P)$ simetrala ugla $\sphericalangle BNA$ i da je $p(N,M)$ simetrala ugla $\sphericalangle CNB$. Poslije toga ćemo pokazati da je $KL \parallel AC$.

Tačka P je središte luka AB $\Rightarrow$
$\Rightarrow AP \cong BP \Rightarrow \triangle APB$ jk. $(\sphericalangle BAP = \sphericalangle PBA = \lambda)$

$\square APBN$ je tetivni $\Rightarrow \sphericalangle BAP \cong \sphericalangle BNP = \lambda$ (nad tetivom BP)
i $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PNA = \lambda$ (nad tetivom AP)

$\Rightarrow p(N,P)$ je simetrala ugla $\sphericalangle ANB$.

Slično, M sredina luka $BC \Rightarrow \triangle BMC$ jk $(\sphericalangle MCB \cong \sphericalangle CBM = \omega)$
$\square NBMC$ je tetivni $\Rightarrow p(N,M)$ je simetrala $\sphericalangle CNB$.

Posmatrajmo $\triangle ABN$.
NL simetrala $\sphericalangle BNA \Rightarrow \dfrac{AL}{LB} = \dfrac{AN}{NB}$.

Posmatrajmo $\triangle NBC$
NK simetrala $\sphericalangle CNB \Rightarrow \dfrac{CK}{KB} = \dfrac{NC}{NB}$

kako je $AN = NC$ (sredina luka AC) $\Longrightarrow \dfrac{AL}{LB} = \dfrac{CK}{KB}$

tj. $\dfrac{BL}{LA} = \dfrac{BK}{KC} \xrightarrow{O.T.T.} KL \parallel AC$

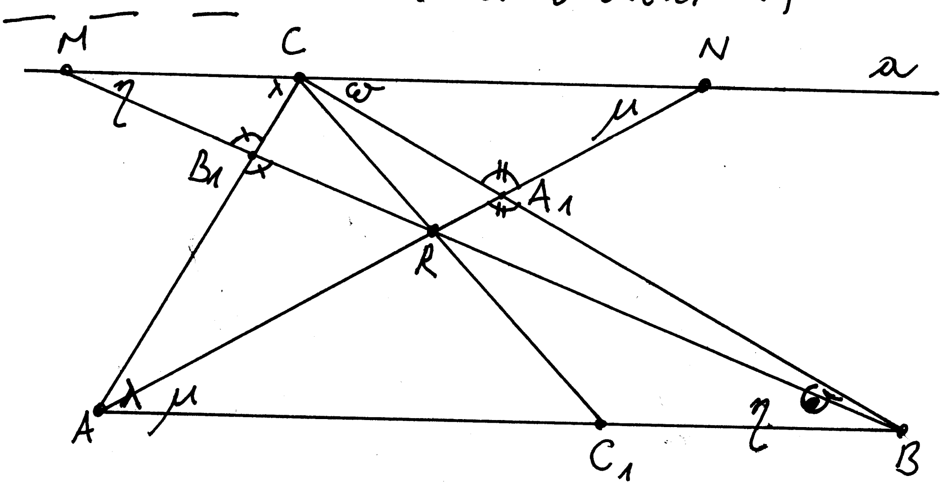
q.e.d.

(#) (Teorema Čevija) Neka tačke A_1, B_1 i C_1 pripadaju stranicama BC, AC i AB trougla $\triangle ABC$ redom. Dokazati da se duži AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u istoj tački ako i samo ako vrijedi $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.

Rj.

potreban uslov

„$\Leftarrow$": AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački (recimo tački R) $\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.

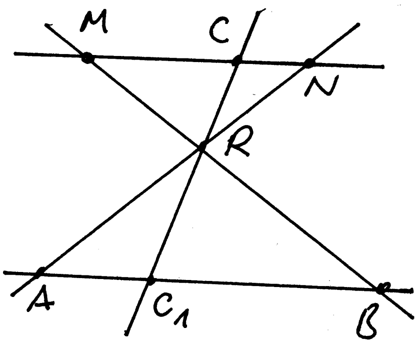


Neka je $a \parallel p(A,B)$, $C \in a$ i

$p(A, A_1) \cap a = \{N\}$

$p(B, B_1) \cap a = \{M\}$

Primjetimo da je $\triangle ABB_1 \sim \triangle CMB_1$ i $\triangle ABA_1 \sim \triangle NCA_1$



$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

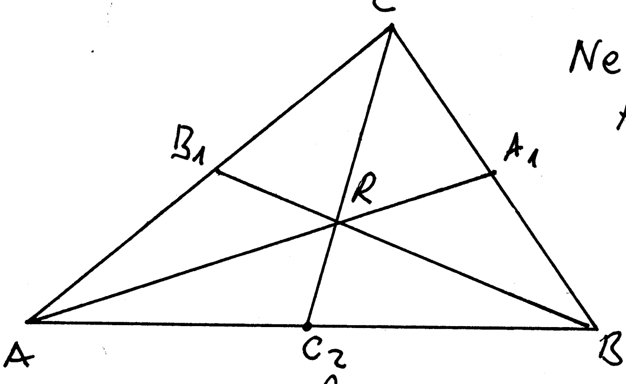
$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{MC}{AB} \quad \dots(*) \qquad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{NC} \quad \dots(**)$$

$$\overset{T_0 T_0}{\Longrightarrow} \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{NC}{MC} \quad \dots(***) \qquad \left.\begin{matrix}(*)\\(**)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{MC}{AB} \cdot \frac{AB}{NC}$$

$$\overset{(***)}{\Longrightarrow} \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

dovoljan uslov

„$\Rightarrow$": $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \Rightarrow$ duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački.



Neka je $AA_1 \cap BB_1 = \{R\}$ i $p(C,R) \cap AB = \{C_2\}$

Prema potrebnom uslovu $\frac{AC_2}{BC_2} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$ i

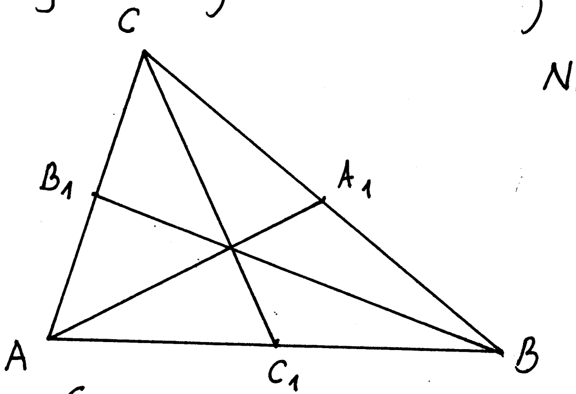
$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}$

zbog jedinstvenosti unutrašnje podjele duži $\Rightarrow C_1 \equiv C_2 \Rightarrow AA_1, BB_1$ i CC_1 se sijeku u istoj tački q.e.d.

Napomena: Prave AA_1, BB_1 i CC_1 zovu se Cevijne prave.

Dokazati da se a) težišnice b) visine c) simetrale uglova trougla sijeku u istoj tački.

Rj: a)



Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 težišnice ΔABC.

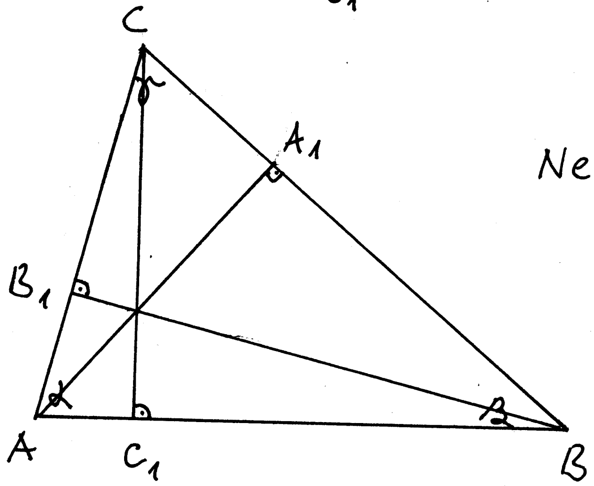
$$\frac{AC_1}{BC_1}=1,\ \frac{BA_1}{CA_1}=1,\ \frac{CB_1}{AB_1}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \xRightarrow{\text{teoremi Čevija}}$$

AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački

q.e.d.

b)



Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla ΔABC sa uglovima $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCA$.

Primjetimo da je (sličnost UUU):

$$\Delta AC_1C \sim \Delta ABB_1,\quad \Delta BA_1A \sim \Delta BCC_1,\quad \Delta CAA_1 \sim CB_1B$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

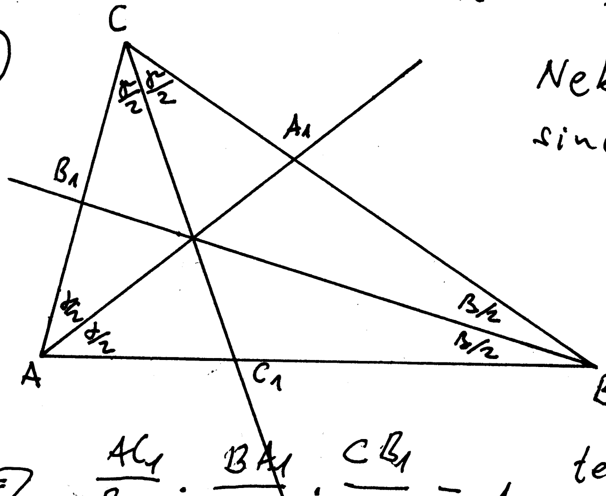
$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC}{AB}\ (1) \qquad \frac{BA_1}{BC_1}=\frac{AB}{BC}\ (2) \qquad \frac{CB_1}{CA_1}=\frac{BC}{AC}\ (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{CB_1}{CA_1}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$$

$\xRightarrow{\text{teoremi Čevije}}$ duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački

q.e.d.

c)



Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 duži koje leže na simetrali uglova trougla ΔABC.

Simetrala ugla dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije.

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{CB_1}{AB_1}=\frac{BC}{AB},\quad \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \xRightarrow{\text{teoremi Čevije}}$$

duži AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u istoj tački

q.e.d.

(#) Neka su $p(A,A_1)$, $p(B,B_1)$ i $p(C,C_1)$ tri prave trougla ΔABC koje se sijeku u R. Dokazati da vrijedi:

$$\frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=1.$$

Rj. Prije nego uradimo zadatak primjetimo dvije osobine trouglova:

a) za svaki ΔPQR, u kome je $M\in PR$ proizvoljna tačka,

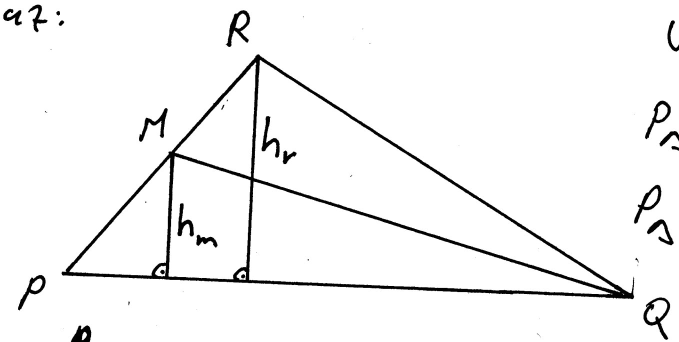
vrijedi $\dfrac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{PM}{PR}$

b) za svaki ΔPQR, kome je data proizvoljna tačka N u unutrašnjosti trougla, i $\{G\}=p(R,N)\cap PQ$,

vrijedi $\dfrac{P_{\Delta PQN}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{NG}{RG}$.

dokaz:

a)

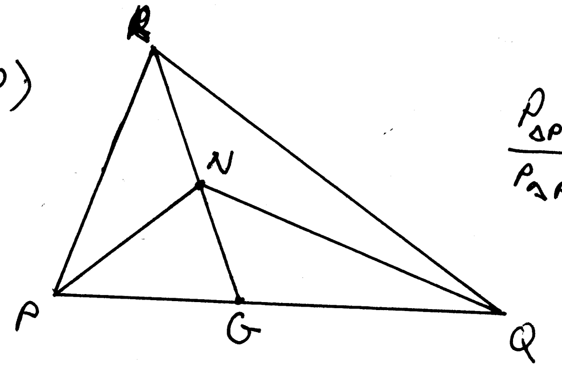


Uvedimo oznake kao na slici.

$$\left.\begin{aligned}P_{\Delta PQM}&=\tfrac{1}{2}h_m\cdot PQ\\ P_{\Delta PQR}&=\tfrac{1}{2}h_r\cdot PQ\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\frac{h_m}{h_r}\overset{ToT_o}{=\!=}\frac{PM}{PR}$$

tj. $\dfrac{P_{\Delta PQM}}{P_{\Delta PQR}}=\dfrac{PM}{PR}$ q.e.d.

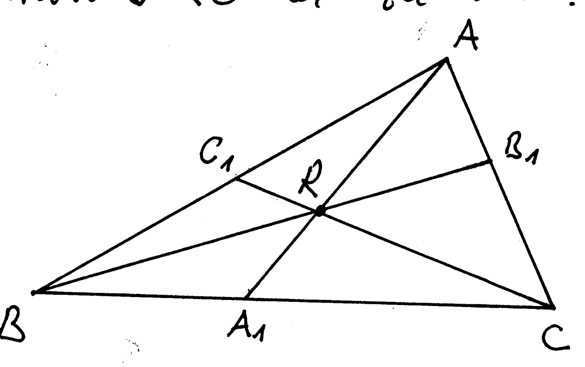
b)



$$\left.\begin{aligned}\frac{P_{\Delta PGN}}{P_{\Delta PGR}}=\frac{GN}{RN}&\Rightarrow P_{\Delta PGN}=P_{\Delta PGR}\cdot\frac{GN}{RN}\\ \frac{P_{\Delta GQN}}{P_{\Delta GQR}}=\frac{GN}{RN}&\Rightarrow P_{\Delta GQN}=P_{\Delta GQR}\cdot\frac{GN}{RN}\end{aligned}\right\}+\Rightarrow\frac{P_{\Delta PQN}}{P_{\Delta PQR}}=\frac{GN}{RN}$$

q.e.d.

Vratimo se na zadatak. Dokažimo da vrijedi $\dfrac{RA_1}{AA_1}+\dfrac{RB_1}{BB_1}+\dfrac{RC_1}{CC_1}=1$.



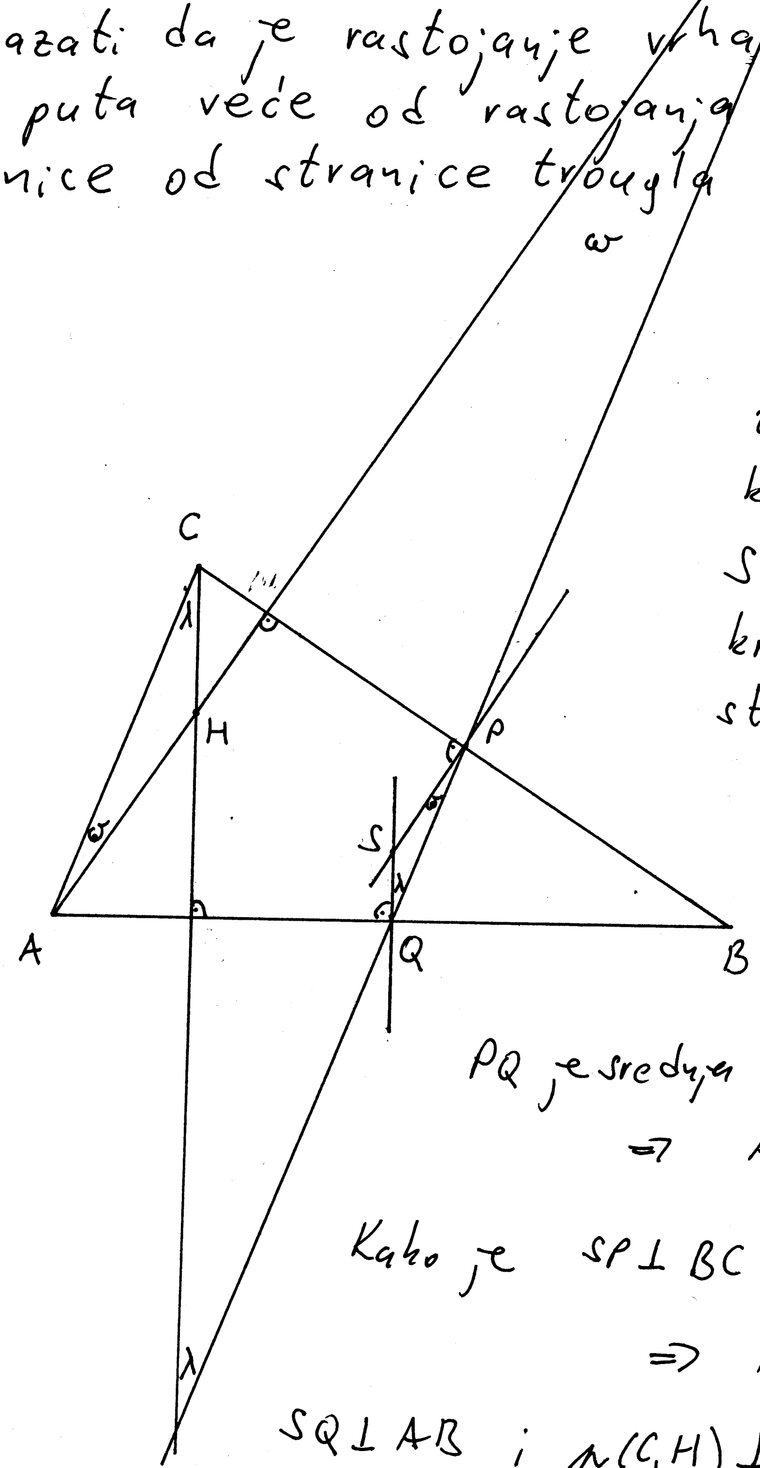
$$\frac{P_{\Delta BCR}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RA_1}{AA_1}\ \ldots(1),\quad \frac{P_{\Delta ARC}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RB_1}{BB_1}\ \ldots(2),\quad \frac{P_{\Delta ABR}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{RC_1}{CC_1}\ \ldots(3)$$

$$(1)+(2)+(3)\quad \frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=\frac{P_{\Delta BCR}+P_{\Delta ARC}+P_{\Delta ABR}}{P_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow\frac{RA_1}{AA_1}+\frac{RB_1}{BB_1}+\frac{RC_1}{CC_1}=1 \text{ q.e.d.}$$

(#) Dokazati da je rastojanje vrha trougla od ortocentra dva puta veće od rastojanja centra opisane kružnice od stranice trougla naspram tog vrha.

Rj.



Neka je dat trougao ΔABC u kome je H ortocentar, S centar opisane kružnice, P i Q sredine stranica BC i AB redom.

Dokažimo da je $CH = 2 \cdot SQ$.

PQ je srednja linija trougla
$\Rightarrow AC \parallel PQ$ i $PQ = \frac{1}{2} AC$.

Kako je $SP \perp BC$ i $p(A,H) \perp BC$
$\Rightarrow AH \parallel SP$.

$SQ \perp AB$ i $p(C,H) \perp AB \Rightarrow CH \parallel SQ$.

Trougao ΔAHC i ΔSQP imaju tri para paralelnih stranica
$\Rightarrow$ imaju podudarne uglove

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle C = \sphericalangle Q \\ \sphericalangle A = \sphericalangle P \\ \sphericalangle H = \sphericalangle S \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič UUU}} \Delta AHC \sim \Delta PSQ$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{PQ} = \frac{CH}{SQ}$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{SQ} = \frac{2PQ}{PQ} \Rightarrow CH = 2 \cdot SQ$$

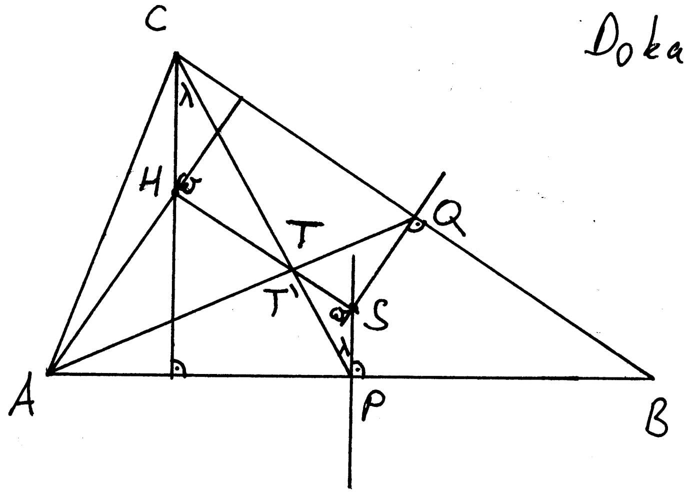
q.e.d.

(#) (Ojlerova prava)

Dokazati da su ortocentar, težište i centar opisane kružnice trougla kolinearne tačke pri čemu težište T dijeli duž HS u omjeru $2:1$.

<u>Napomena</u>: Prava kroz H, T i S se zove Ojlerova prava.

Rj. Neka je H ortocentar, a S centar opisane kružnice trougla $\triangle ABC$, P i Q sredine stranica AB i BC redom. Označimo sa $\{T'\} = CP \cap HS$.



Dokažimo da je $T' \equiv T$ i $HT : TS = 2:1$.

$p(C,H) \perp AB$ i $p(S,P) \perp AB$
$\Rightarrow p(C,H) \parallel p(P,S)$

$p(C,H) \parallel p(P,S)$ i $p(C,P)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle HCT' \cong \measuredangle SPT' = \lambda$
$p(C,H) \parallel p(P,S)$ i $p(H,S)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CHT' \cong \measuredangle PST' = \omega$
Prema prethodnom zadatku je $CH : PS = 2:1$

$\Rightarrow$

(primjetimo da smo se mogli pozvati i na sličnost UUU. Zašto?)

$\overset{\text{slič. USU}}{\Longrightarrow} \triangle CHT' \sim \triangle PST'$

$\Downarrow$

$$\frac{CH}{PS} = \frac{CT'}{T'P} \Rightarrow \frac{CT'}{T'P} = \frac{2}{1}$$

pa zbog jedinstvenosti podjele duži u datom omjeru $\Rightarrow T \equiv T'$

Iz sličnosti slijedi i da je $\dfrac{HT}{TS} = \dfrac{CT}{TP} = \dfrac{2}{1}$

$\Rightarrow HT : TS = 2:1$ q.e.d.

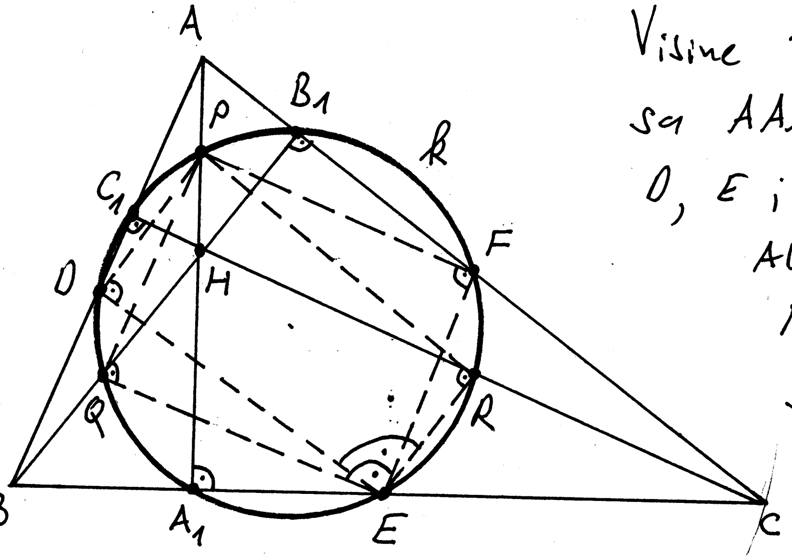
$\Downarrow$

ortocentar, težište i centar opisane kružnice $\triangle$ su kolinearne tačke q.e.d.

(#) Dokazati da sredine stranica, podnožja visina i sredine duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima trougla pripadaju jednoj kružnici

Napomena: Kružnica koja prolazi kroz navedenih devet tačaka zove se Ojlerova kružnica ili Kružnica devet tačaka

Rj.



Visine trougla ΔABC označimo sa AA_1, BB_1 i CC_1. Neka su D, E i F redom sredine stranica AB, BC i AC, ΔABC. Neka su P, Q i R redom sredine duži AH, BH i CH gdje je H ortocentar trougla.

Treba dokazati da tačke $A_1, B_1, C_1, D, E, F, P, Q$ i R pripadaju istoj kružnici.

Neka je k kružnica opisana oko ΔPA_1E. Dokažimo da ostale tačke pripadaju ovoj kružnici.

PF srednja linija $\Delta C_1CA \Rightarrow p(P,F)\parallel p(C,C_1)$
EF srednja linija $\Delta ABC \Rightarrow p(E,F)\parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \measuredangle EFP = 90^\circ \Rightarrow \square PA_1EF$ tetivni $\Rightarrow F\in k$

DP srednja linija $\Delta ABH \Rightarrow p(D,P)\parallel p(B,B_1)$
DE srednja linija $\Delta ABC \Rightarrow p(D,E)\parallel p(A,C)$
$\Rightarrow \measuredangle PDE = 90^\circ \Rightarrow \square DA_1EP$ tetivni $\Rightarrow D\in k$

PR sred. lin. $\Delta AHC \Rightarrow p(P,R)\parallel p(A,C)$
ER sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(E,R)\parallel p(B,B_1)$
$\Rightarrow \measuredangle ERP = 90^\circ \Rightarrow \square A_1ERP$ tetivno $\Rightarrow R\in k$

QE sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(Q,E)\parallel p(C,C_1)$
PQ sred. lin. $\Delta BHA \Rightarrow p(P,Q)\parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \measuredangle PQE = 90^\circ \Rightarrow \square QA_1EP$ tetivni $\Rightarrow Q\in k$

QE sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(Q,E)\parallel p(C,C_1)$
EF sred. lin. $\Delta ABC \Rightarrow p(E,F)\parallel p(A,B)$
$\Rightarrow \measuredangle QEF = 90^\circ \Rightarrow \square B_1QEF$ tetivni $\Rightarrow B_1\in k$

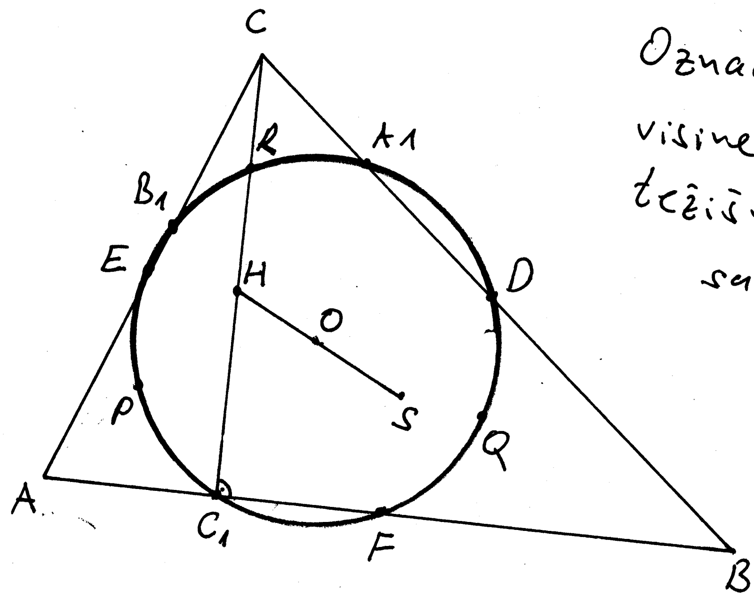
DE sred. lin. $\Delta ABC \Rightarrow p(D,E)\parallel p(A,C)$
ER sred. lin. $\Delta BCH \Rightarrow p(E,R)\parallel p(B,B_1)$
$\Rightarrow \measuredangle DER = 90^\circ \Rightarrow \square DERC_1$ tetivno $\Rightarrow C_1\in k$

Prema tome

$A_1, B_1, C_1, P, Q, R, D, E, F \in k$ q.e.d.

(#) Dokazati da kružnica 9 tačaka ima centar na sredini duži SH (S centar opisane kružnice, H ortocentar trougla) a poluprečnik je dužine $\frac{1}{2}R$ (R poluprečnik opisane kružnice).

Rj:



Označimo sa AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla, AD, BE i CF težišnice trougla; sa P, Q i R sredine duži AH, BH i CH.

Posmatrajmo homotetiju sa centrom u H i koeficijentom $\frac{1}{2}$. Pri toj homotetiji vrh A se preslikava u P, vrh B u Q, a vrh C u tačku R. Pri ovoj homotetiji se opisana kružnica slika u kružnicu oko P, Q i R, dakle u kružnicu devet tačaka. Prema tome poluprečnik kružnice 9 tačaka je $\frac{1}{2}R$, a centar joj je na polovini duži SH.

q.e.d.